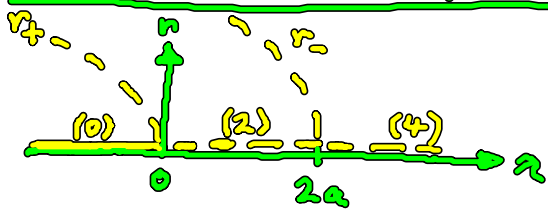


Zwei gekoppelte Hopf-Normalformen



$$\dot{z}_1 = f(z_1) + a(z_2 - z_1) + b(z_2(t-\tau) - z_1(t))$$

$$\dot{z}_2 = f(z_2) + a(z_1 - z_2) + b(z_1(t-\tau) - z_2(t))$$

Stabilisierung des gegenphas. Orbits: $\tau = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega_0}$

$$z_+ : z = \lambda + i + b(e^{-\pi z} - 1) \quad \textcircled{+} \quad (b=0 \Rightarrow z = \lambda + i \text{ bei } \lambda = 2a > 0 \text{ instab. in } +)$$

$$z_- : z = \underbrace{\lambda - 2a}_{0 \text{ an Bif. pkt. v. } z_-} + i - b(e^{-\pi z} - 1) \quad \textcircled{-} \quad (b=0 \Rightarrow \text{bei } \lambda = 2a : z = i \text{ Bif. von } z_- = z_+)$$

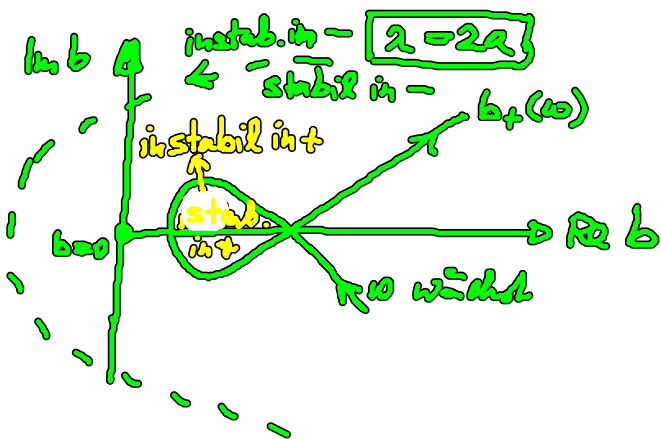
Suche Hopf-Kurven in $(\text{Re } b, \text{Im } b)$ -Ebene, die $\text{Re } z = 0$ erfüllen, d.h. Grenzen, an denen sich die instab. Dimension des Fixpunktes ändert. Dann wird delay-induzierter Orbit generiert, der zum Stabilitätszustand mit dem gegenphasigen Pyragas-Orbit gebrochen wird (transkrit. Bif.).

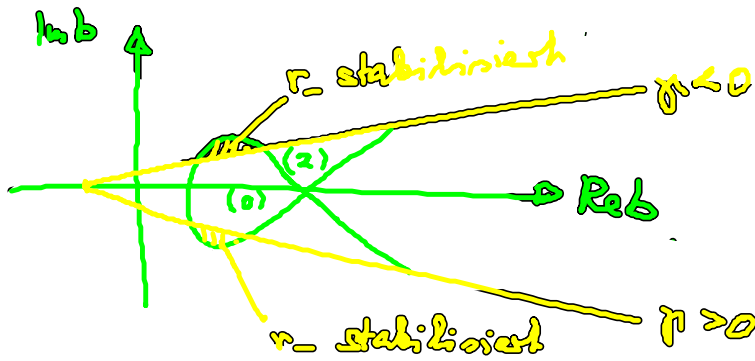
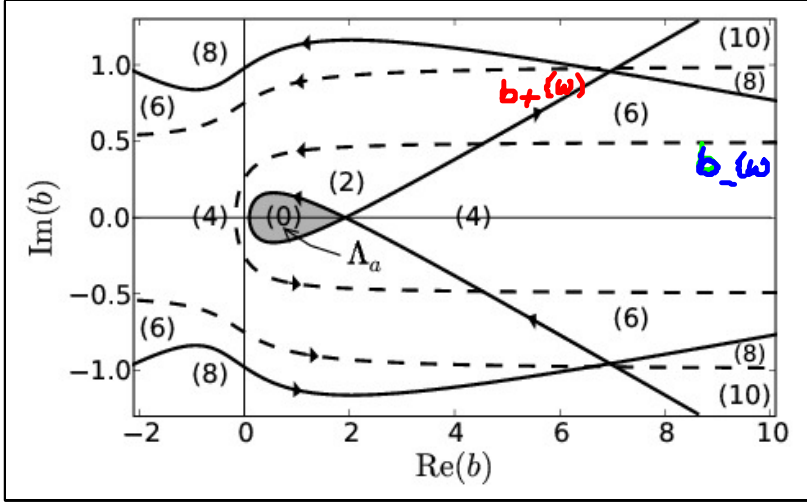
Parametrisierung der Hopf-Kurven ($z = 0 + i(1 + 2\omega)$) $b = b(\omega)$

Einsetzen in $\textcircled{+}$ und Umformen nach b liefert $b_+(\omega)$ Kurve
 Einsetzen $\textcircled{-}$ liefert $b_-(\omega)$

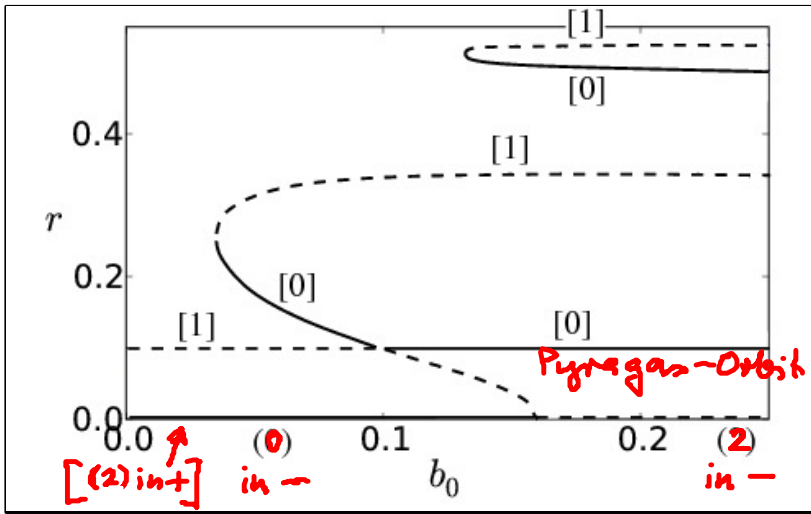
$$b_+(\omega) = 2 \frac{a - i\omega}{1 + \exp(-2\pi i\omega)} = a + \omega \tan(\pi\omega) + i(-\omega + a \tan \pi\omega)$$

$$b_-(\omega) = 2 \frac{i\omega}{-1 + \exp(-2\pi i\omega)} = -\omega \cot(\pi\omega) - i\omega$$



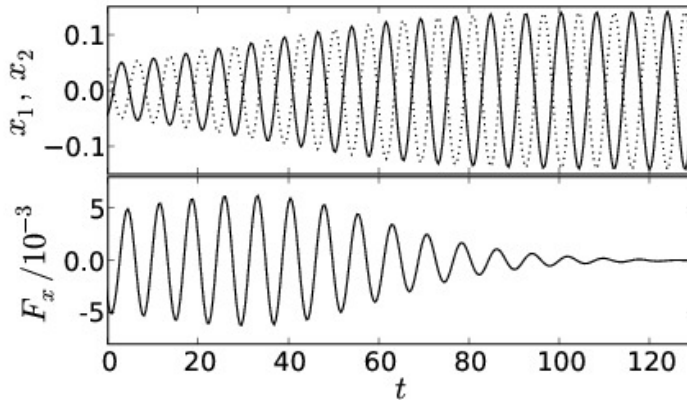


zusätz. Bed., damit
- Richtung instabil wird



$\lambda = 2a - 0.01$, $a = 0.1$
 $\mu = -10$
 $b = b_0 e^{i\frac{\pi}{8}}$

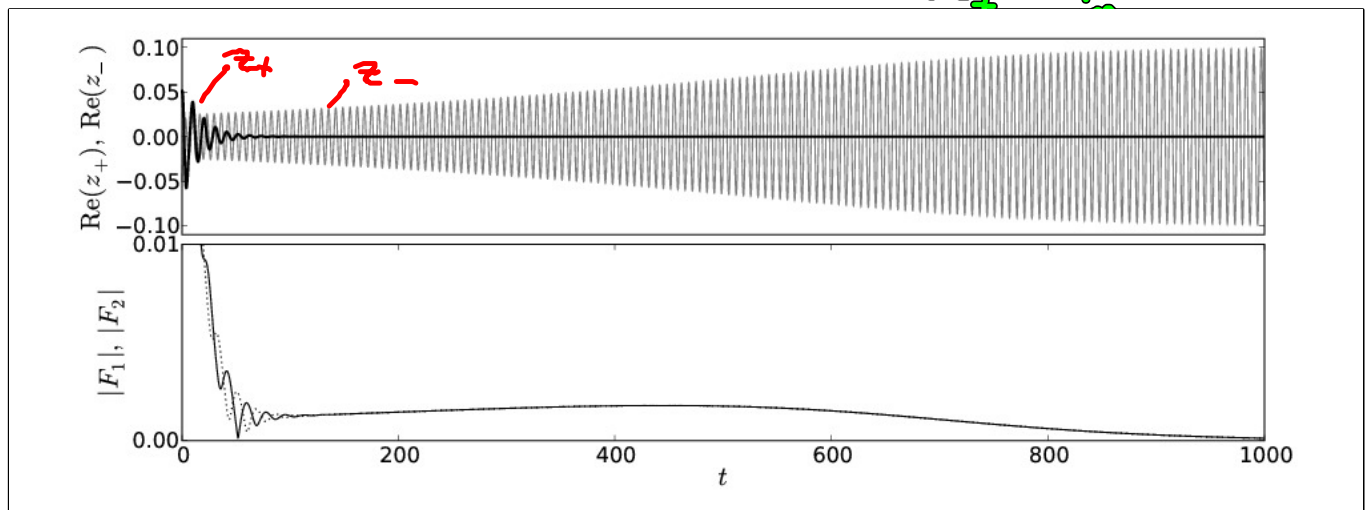
$$b_0 = 0.84$$



gegenphasiger Orbit
stabilisiert!
 $\text{Re } z_1(t) = x_1(t) = x_2(t - \frac{T_-}{2})$
" π

Kontrollkraft $\rightarrow 0$

$\text{Re } z_{\pm} \rightarrow 0$



Zusammenfassung:

- 2 gekoppelte Hopf-Normalformen
 - sync-Orbit stabilisierbar wie in Kap. 3 mit $\tau = p_+$
 - gegenphasiger Orbit stabilisierbar mit $\tau = \frac{T_-}{2}$
für bestimmte Rückkopplungsgewichte $b \in \mathbb{R}$
 - mit $b \neq 0$ entstehen neue Delay-induzierte gegenphasige Orbits zusätzlich zum Orbit z_-

4.2 Netzwerke

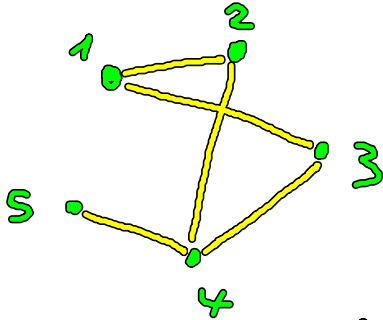
ausgehend von 2 gekoppelten Elementen \rightarrow viele

Kopplung : links (Kanten eines Graphen)

Elemente : nodes (Knoten) im Netzwerk

- Topologie : Welche Knoten sind gekoppelt ?
- Kopplungschema : wie sind die Knoten gekoppelt (welche Variablen)

4.2.1 Topologie des Netzwerkes



$N \times N$ Matrix, N Zahl der Knoten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hier : nicht gerichtete Kopplung (birektional)

A adjacency matrix (Nachbarschaftsmatrix)

A symmetrisch

$$a_{ij} = 1, \text{ falls Kopl. } i \leftrightarrow j \\ = 0 \text{ sonst}$$

Erweiterung auf gerichtete Kopplung \rightarrow A nicht mehr symmetrisch

" auf gerichtete Kopplungen \rightarrow a_{ij} nicht nur auf Werte 0 oder 1 beschränkt ($a_{ij} \in \mathbb{R}$)

stat von A spricht man

von Kopplungsmatrix G

g_{ij} : Stärke der Kopplung

• Charakterisierung der Topologie durch bestimmte Kenngrößen:

Knotenordnung
(degree) $k_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ (Zahl der angekoppelten E!.)



Verteilung von k : $P(k)$ Wahrscheinl., einen Knoten mit Ordnung k zu finden

mittlere Knotenordnung $\langle k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} P(k) k$