

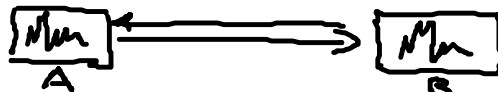
## 4.3 Synchronisation von Netzwerken

Synchronisation und Desynchronisation:

- erwünschter Effekt:

z.B. Synchronisation von Lasern

(verschlüsselte Kommunikation durch chaot. Synchr.)



Synchronisation der Neuronen im Gehirn  
(Lebenvorgänge, Wahrnehmung)

- unerwünschter Effekt:

z.B. patholog. Zustände im Gehirn (synchr. Fesseln)  
(Parkinson, Tremor, Epilepsie)

Schwingungen der London Millennium Bridge (2000)  
durch spontane Synchr. der Fußgänger

Lit.: Pikovsky, Rosenblum, Kurths: Synchronization  
(Cambridge U Press 2001)

### 4.3.1 Voraussetzung für Synchronisierung aller Elemente

$$\dot{x}_i = F_i(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} \frac{H_{ij}}{H_{ij}} x_j(t - \tau_{ij}) \quad \begin{array}{l} x_i \in \mathbb{R}^m \\ i=1, \dots, N \end{array}$$

- $F_i = F$  alle Elemente gleiche lokale Dynamik
- $\tau_{ij} = \tau$  " gleiche Signallaufzeiten

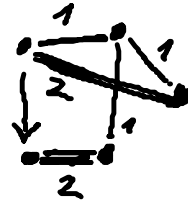
- $\sum_{j=1}^N G_{ij} = \text{const. } \forall i$  alle Elemente bekommen im Fall der Synchronisierung das gleiche Eingangssignal

oBdA:  $\sum_{j=1}^N G_{ij} = 1$

oder  $\sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} \rightarrow \sum_j \tilde{G}_{ij} \Rightarrow \sum_{j=1}^N \tilde{G}_{ij} = \sigma$  (konstante Zeilensumme)  
 = long. Eigenwert von  $\tilde{G}$

zur synchr. Mannigfaltigkeit

konstante Zeilensumme erreicht man durch Wichtung der Links



- $\underline{H}_{ij} = \underline{H}$  identische Kopplungsschemata

$\underline{H} \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$\Rightarrow$  Dynamik auf der isochronen Synchronisationsmannigfalt. gegeben durch

$$\dot{\underline{x}}_s = \underline{F}(\underline{x}_s) + \sigma \underline{H} \underline{x}_s(t-\tau) \quad \underline{x}_s \equiv x_i(t) \quad \forall i$$

↑  
long. EW von  $\tilde{G}$

entspricht der Dynamik eines einzelnen Elements mit zeitverzögerter Rückkopplung

(vgl. § 4.1 gleichphasige Lösung)

$v_1, \dots, v_{N-1}$  transversale EW von  $\tilde{G}$   
 $\rightarrow$  wichtig für Untersuchung der Stabilität der synchronen Lösung

Frage: Ist die Dynamik in Synchr. Mannigfaltigkeit stabil?

### 4.3.2 Master Stability Function (MSF)

Schema zur Bestimmung der Stabilität der synchronen Lösung

Netzwerk

$$\dot{\underline{x}}_i = \underline{F}(\underline{x}_i) + \sigma \sum_j G_{ij} \underline{H} \underline{x}_j$$

Topologie des Netzwerkes:  
Eigenwerte der Kopplungsmatrix  $G$  :  $\nu_k$

lokale Dynamik:  
Betrachte  $\delta \underline{x}$  vom synchr. Zustand  $\underline{x}_s$   
 $\delta \underline{x}_i = \underline{x}_i - \underline{x}_s$  und untersuche  
Lyapunov-Exp.  $\Lambda$  von  
 $\delta \dot{\underline{x}} = \underline{DF}|_{\underline{x}_s} \delta \underline{x} + \nu \underline{H} \delta \underline{x}$   
als Fkt. von  $\nu$ , also  $\Lambda(\nu)$

Synchronisationsmannigf. stabil,  
wenn größte Lyapunov-Exp. bei  
 $\nu_k$  ( $k=1, \dots, N-1$ )  $< 0$   
transversale EW

MSF = größte Lyapunov-Exp.  $\Lambda(\nu)$   $\nu \in \mathbb{C}$   
Synchron. lös. stabil  $\Leftrightarrow \Lambda(\nu_k) < 0$  ( $k=1, \dots, N-1$ )  
 $\uparrow$   $\uparrow$   
aus Dyn. aus Topol.

Vorteile : Wenn  $\Lambda(\nu)$  einmal berechnet ist, kann Stab. für beliebige Topologien betrachtet werden  
(Separ. von Topologie u. lokaler Dynamik)

NB :- analog für diskrete Abbildungen (statt Dgl.)  
- sowohl period. als auch chaot. synchron. lös. untersuchbar

Herleitung:

(a)  $\dot{\underline{x}}_i = \underline{F}(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} \underline{H} \underline{x}_j$   $\underline{x}_i \in \mathbb{R}^m$  (einzelnes Element)

(b)  $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}) + \sigma (\underline{G} \otimes \underline{H}) \underline{x}$   $\underline{x} \in \mathbb{R}^{mN}$  (komplettes Netz)

(c) linearisierung um den synchr. Zustand  $\underline{\delta x} = \underline{x} - \underline{x}_{\text{sync}} \in \mathbb{R}^{mN}$

$\underline{\delta \dot{x}} = \underline{DF}(\underline{x}_{\text{sync}}) \underline{\delta x} + \sigma (\underline{G} \otimes \underline{H}) \underline{\delta x}$

(d) Diagonalisierung von Kopplungsmatrix  $\underline{G}$  (Ann.  $\sum_j G_{ij} = \text{const.}$ )

$\underline{\delta \dot{x}}_i = \underline{DF}(\underline{x}_{\text{sync}}) \underline{\delta x}_i + v_k \underline{H} \underline{\delta x}_i$   $\underline{x}_1 = \dots = \underline{x}_N \in \mathbb{R}^m$   $\sum_j \tilde{G}_{ij} = \sigma$

für Eigenwert  $v_k, k=1, \dots, N$  ( $v_N = \sigma$  lang. EW)

(e) Verwende  $v = \alpha + i\beta$  als Parameter und berechne  $\Lambda(v)$  (MSF)

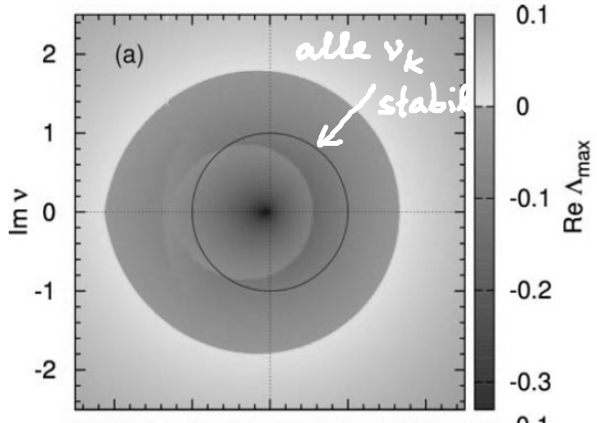
(f) Test, ob  $\Lambda(v_k) < 0$  für alle  $v_k$  vom geg.  $\underline{G}$  für stab. des synchr. Lös. ( $k=1, \dots, N-1$ )

NB:  $\Lambda(v_N) > 0$  chaot. sync. Lös.

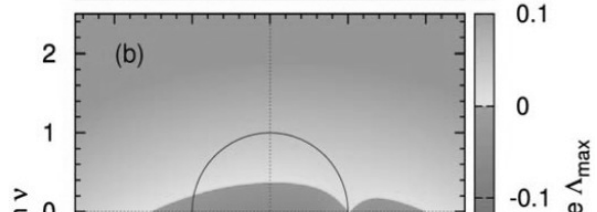
$\Lambda(v_N) = 0$  period. sync. Lös.

Verallgemeinerung auf zeitverzög. Kopplung  $\Rightarrow \left. \begin{matrix} \underline{x}_j(t-\tau) \\ \underline{x}(t-\tau) \\ \underline{\delta x}(t-\tau) \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{im} \\ \text{Koppl.} \\ \text{term} \end{matrix}$

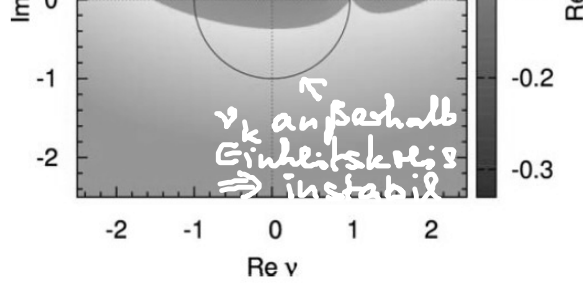
Beispiel: Hopf-Normalform ( $\lambda=0.1, \mu=0, \beta=0$ ):  
period. Dyn.



$\sigma \sum_j G_{ij} = 0.3, \tau = 2\pi$   
unidirektionaler Ring  $v_k = e^{\frac{2\pi i k}{N}}$   
alle EW auf Einheitskreis



$\sigma \sum_j G_{ij} = 0.08, \tau = 0.52\pi$



### 4.3.3 Stabilität der synchron. Lös. für großes $\tau$

V. Flunkert, S. Yanchuk, T. Dahms, E. Schöll: PRL 105, 254101 (2010)

$\Lambda_{\max}(\sigma) > 0$  chaot. Dyn.  
 $\leq 0$  period. Dyn. / Fixpt.

$\Lambda_{\max}(v_k) < 0$  Sync stabil  
 $> 0$  " instabil }  $k=1, \dots, N-1$

Struktur der MSF für großes Delay:

- $\Lambda_{\max}(re^{i\theta})$  ist rot. symm. :  $\Lambda_{\max}(r)$
- $\Lambda_{\max}(0) < 0$  und monoton wachsend mit  $r$ ,  
 $\Lambda_{\max}(r)$  wird positiv bei  $r = r_0$

oder

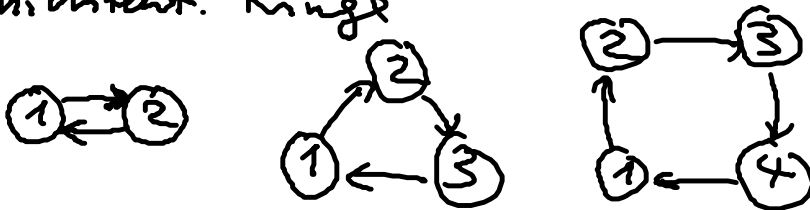
$\Lambda_{\max}(0) > 0$  und dann überall konstant  $\forall r$

### Universelle Klassifikation von Netzwerken mit großem $\tau$

class	chaot. sync. Dyn. ( $r_0 <  \sigma $ )	non-chaot. sync. Dyn. ( $r_0 >  \sigma $ )
(A) $ v_{\max}  <  \sigma $	sync stabil $\Leftrightarrow  v_{\max}  < r_0$	sync stabil
(B) $ v_{\max}  =  \sigma $	sync instabil	sync stabil
(C) $ v_{\max}  >  \sigma $	sync instabil	sync stabil $\Leftrightarrow  v_{\max}  < r_0$

## Klasse B und C - Beispiele :

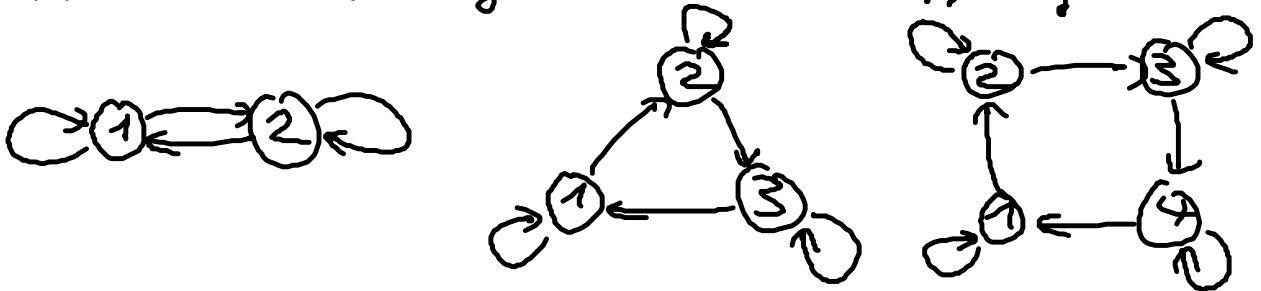
- unidirekt. Ringe



- Netzwerke mit Zeilensumme  $\sigma = 0$

## Klasse A

- unidirektionale Ringe mit Rückkopplung



- bidirekt. Ringe
- all-to-all coupling
- Netzwerke, die nur exzit. (attraktiv) oder nur inhib. (repulsiv) gekoppelt sind (Klasse A oder B),