

## 4.4 Netzwerke aus Hopfnormalen form

Literatur: C.U. Phoe et al. PRE 81, 025205(R) (2010)

- ausgehend von 4.1 betrachten wir nun  $N$  gekoppelte Hopf - Normalformen

$$\dot{z}_j = (\lambda + i + (1+i\sigma) |z_j|^2) z_j + \sigma \sum_{n=1}^N G_{jn} (z_n (b - z) - z_j (b)) \quad (\text{I})$$

$\uparrow$   $\omega=1$        $\uparrow$  superkrit.

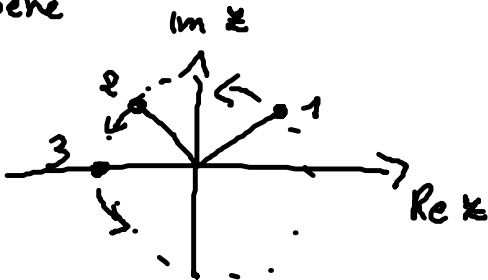
Kopplungsstärke  $\epsilon = K e^{i\beta} \in \mathbb{C}$

Kopplungsmatrix  $\underline{G}$   $\downarrow$  Phase

Oszillatoren  $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$   
 $\uparrow$  Radius

### 4.4.1 invariante Zustände

- Veranschaulichung der Dynamik der einzelnen Oszillatoren in der komplexen Ebene



- Wir suchen invariante Zustände, für die

gilt  $r_j = r$  (konst. Amplituden)

$\varphi_j = \Omega_m$  (gemeinsame konst. Frequenz)

Annahme: gleiche Amplitude aller Oszillatoren, konstanter Phasenunterschied

$$r_j = r_{s,m}$$

$$\varphi_j = \Omega_m t + j \frac{2\pi m}{N}$$

$\Pi$   
 $m \in \mathbb{N}$

Index  $m$  klassifiziert mögliche invariante Zustände

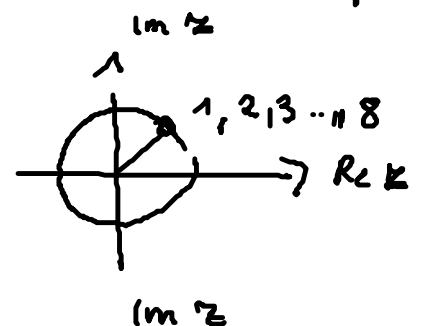
$m=0$

Synchrone in-phase Lösung  
 (zero-lag Lösung)

$$r_j = r_{s,0}$$

$$\varphi_j = \Omega_0 t$$

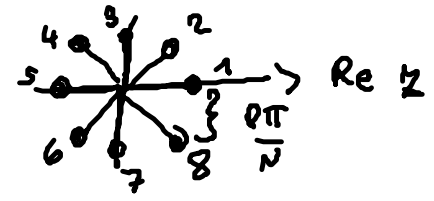
Bsp.  $N=8$



$m=1$  Splay state

$$r_j = r_{s,1}$$

$$p_j = -\Omega_1 t + j \frac{2\pi}{N}$$

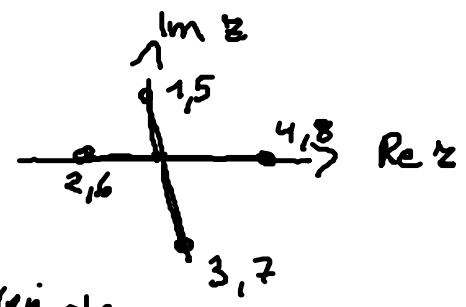


• jeder Oszillator hat andere Phase aber immer gleichen Abstand zum Nachbarn (sich drehendes Speicherrad)

$m > 1$  Cluster Zustände (in phase innerhalb des Clusters, konstanter Phasenunterschied zwischen den Clustern)

Bemerkung: für  $N=2$  entspricht der splay Zustand der gegenphasigen Lösung

$$z_1 + z_2 = 0$$



$m > 1$  Zahl vorhandener Cluster  $M$  gegeben durch kleinsten gemeinsamen Vielfaches von  $m$  und  $N$  geteilt durch  $m$

$$M = \frac{\text{LCM}(m, N)}{m} \quad (\text{Least common multiplier})$$

Beispiel:  $N=8, m=2$

$$\Rightarrow M = \frac{\text{LCM}(8, 2)}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Bestimmen der invarianten Lösungen von (I) durch Einsetzen von (II) in (I)

In Amplitude und Phase lauten die Bestimmungsgleichungen

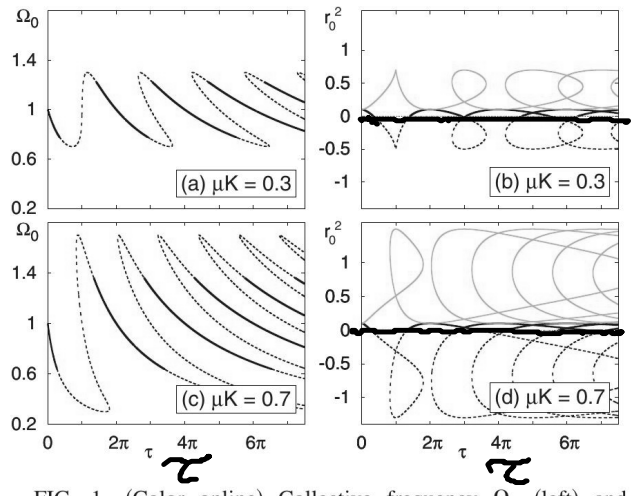
$$r_{s,m}^2 = - \left[ \lambda - \sum_n G_{jn} K \sin \beta + K \sum_n G_{jn} \cos(\Omega) \right]$$

$$\Omega_m = 1 + \sigma r_{s,m}^2 - \sum_n G_{jn} K \sin \beta + K \sum_n G_{jn} \sin(\Omega)$$

Wieder Annahme konstanter Zeilensumme  $\Omega = \beta - \Omega_m \tau + (n-j) \frac{2\pi m}{N}$   
 $\sum_n G_{jn} = \text{const} = 1$

damit im synchronen Zustand alle Elemente gleichen Eingang bekommen

Lösung für inphase Zustand ( $m=0$ )

$\Omega_0$  $\Omega_0$ 

$\sigma_0^2$  }  $\sigma = 0.3$   
 $\sigma_0^2$  }  $\sigma = 0.7$

Blau  $\beta = 0$   
 Orange  $\beta = \Omega_0 \tau$

FIG. 1. (Color online) Collective frequency  $\Omega_0$  (left) and squared amplitude  $r_0^2$  (right) of in-phase oscillation ( $m=0$ ) vs time delay  $\tau$  for different amplitude of the feedback strength [ $\mu K=0.3$  and  $0.7$  in (a), (b) and (c), (d), respectively]. Black (blue) and gray (yellow) curves correspond to a feedback phase  $\beta=0$  and  $\beta=\Omega_0\tau$ , respectively. Unphysical solutions ( $r_0^2 < 0$ ) are dashed. For  $\beta=\Omega_0\tau$  the curves in (a) and (c) have the same shape, but no unphysical solutions occur. Parameters:  $\lambda=0.1$ ,  $\omega=1$ , and  $\gamma=0$ .

### 4.4.2 Stabilität der Lösungen

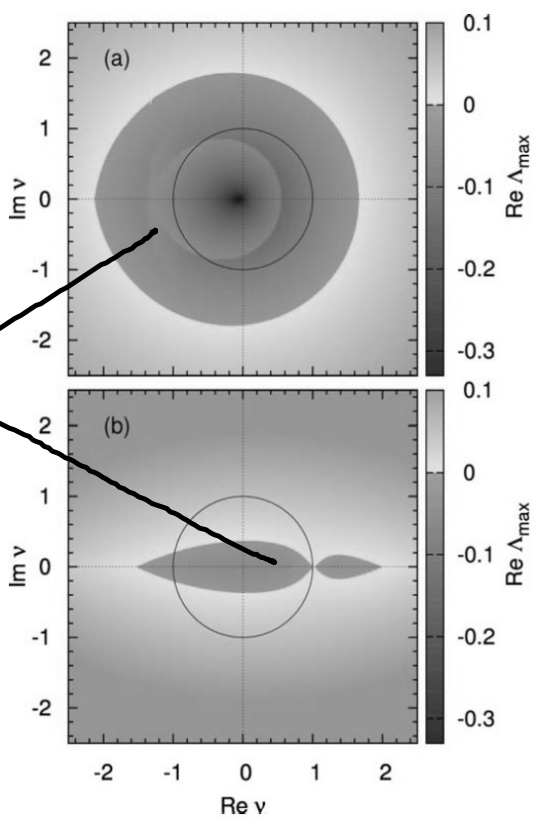
$\Rightarrow$  kennen nun die Lösungen von Gl. I, wissen aber noch nichts über die Stabilität der Lösungen

Berechnen mit MSF (master stability function, siehe 4.3.2)

Erinnerung: MSF: größter Lyapunov-Exponent  $\Lambda_{max}$  als Funktion der Eigenwerte  $\nu$  der Kopplungsmatrix  $G: \Lambda_{max}(\nu)$

- Bem:
- Hier  $\Lambda$  außerdem eine Funktion von  $K$  und  $\tau$ , da die synchrone Mannigfaltigkeit von  $K$  und  $\tau$  abhängt
  - Berechnung von  $\Lambda_{max}$  hier analytisch möglich, da die Jacobi-Matrix der lokalen Dynamik zeitunabhängig ist

$m=0$  (inphase Lösung)



schwarze : unidirektionalen Ring

$$y_n = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right)$$

Eigenwerte liegen auf dem Einheitskreis

$$\beta = 0.3$$

$$\tau = 2\pi$$

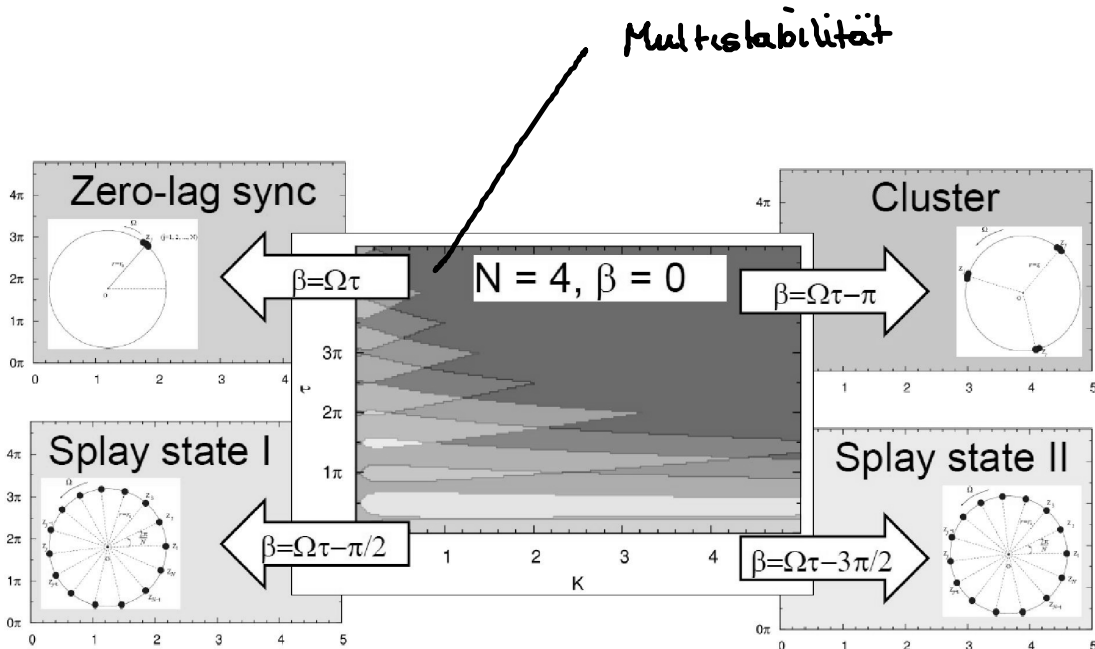
$$\beta = 0.08$$

$$\tau = 0.52\pi$$

=> Für  $\tau = 2\pi$  kann synchrone Lösung stabilisiert werden, wenn z.B. Topologie ein unidirektionaler Ring ist

Betrachten nun  $K$ - $\tau$  Ebene für einen unidirektionalen Ring

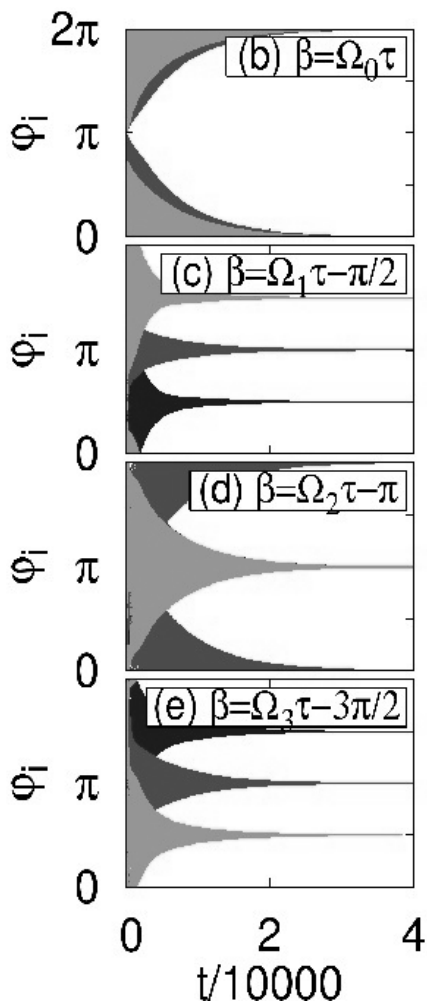
Für einen unidirektionalen Ring kann MST auch für  $m > 0$  berechnet werden



rot zerolag  
blau 2-Cluster  
grün splay 1  
gelb splay 2

=>  $\beta = -\Omega m \tau - \frac{2\pi m}{N}$  sieht Existenz und Stabilität in der ganzen  $K$ - $\tau$ -Ebene ( $K, \tau > 0$ )

# Zeitkaskaden



$\tau = 3\pi$   $G = 3$  (multistabiler Bereich falls  $\beta = 0$ )

$p_i$  relativ zu  $f_1$

## Fazit

Stabilisierung einer Dynamik für geeignete Wahl von  $\beta$

Maß für die Synchronisation (für inphase):

Kuramoto order parameter

$$R = \frac{1}{N} \sum_j e^{i p_j}$$

$|R| = 1$  inphase

$|R| \approx 0$  Desynchronisation oder aber z.B. Splay state

## Zusammenfassung

- Netzwerte aus delay gekoppelten Hopfnormalformen
- mögliche Zustände : Inphase-, Cluster-, Splay-Zustände
- analytische Berechnung der gemeinsamen Frequenz und des Radius
- Stabilität über MST
- geschickte Wahl von  $\beta \Rightarrow$  Stabilisiert gewünschten Zustand  
in der gesamten  $K$ - $z$ -Ebene ( $K, z \geq 0$ )