4.4 Netzwerke aus Hopfnormalenform

Literatur: C.U. Choe et al. PRE **81**, 025205(R) (2010)

- ausgehend von 4.1 betrachten wir nun N gekoppelte Hopf-Normalformen

$$\dot{z}_j = (\lambda + i + (1+i\gamma)|z_j|^2)\, z_j + \sigma \sum_{n=1}^{N} G_{jn}\left(z_n(t-\tau) - z_j(t)\right) \qquad (\mathrm{I})$$

$\omega = 1$ superkrit.

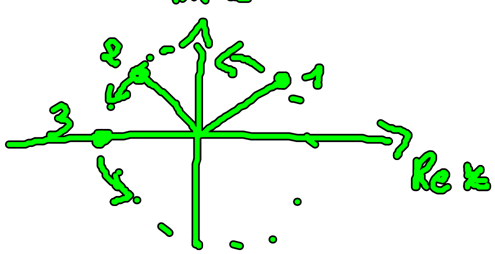
Kopplungsstärke $\sigma = K e^{i\beta} \in \mathbb{C}$

Kopplungsmatrix $\underline{G}$

Oszillatoren $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$ (Phase φ_j, Radius r_j)

4.4.1 invariante Zustände

- Veranschaulichung der Dynamik der einzelnen Oszillatoren in der komplexen Ebene



- Wir suchen invariante Zustände, für die gilt

$\dot{r}_j = 0$ (konst. Amplituden)

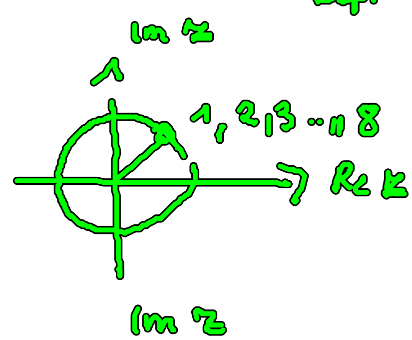
$\dot{\varphi}_j = \Omega_m$ (gemeinsame konst. Frequenz)

Annahme: gleiche Amplitude aller Oszillatoren, konstanter Phasenunterschied

$$\boxed{\begin{aligned} r_j &= r_{0,m} \\ \varphi_j &= \Omega_m t + j\,\frac{2\pi m}{N} \end{aligned}} \qquad (\mathrm{II}) \quad m \in \mathbb{N}$$

Index m klassifiziert mögliche invariante Zustände

Bsp. N=8

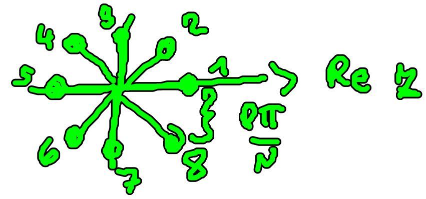


m=0 synchrone in-phase Lösung (zero-lag Lösung)

$r_j = r_{0,0}$

$\varphi_j = \Omega_0 t$

m = 1 splay state

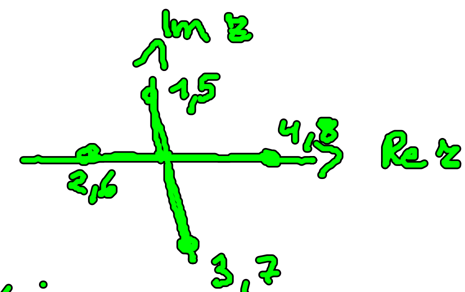


$$r_j = r_{s,1}$$

$$\varphi_j = \Omega_1 t + j\,\frac{2\pi}{N}$$

• jeder Oszillator hat andere Phase aber immer gleichen Abstand zum Nachbarn (sich drehendes Speichenrad)

m > 1 Cluster Zustände (in phase innerhalb des Clusters, konstanter Phasenunterschied zwischen den Clustern)



Bemerkung: für N = 2 entspricht der splay Zustand der gegenphasigen Lösung $z_1 + z_2 = 0$

m > 1 Zahl vorhandener Cluster M gegeben durch kleinsten gemeinsames Vielfaches von m und N geteilt durch m

$$M = \frac{LCM(m,N)}{m}$$ (Least common multiplier)

Beispiel: $N = 8$, $m = 2$

$$\Rightarrow M = \frac{LCM(8,2)}{2} = 8/2 = 4$$

Bestimmen der invarianten Lösungen von (I) durch Einsetzen von (II) in (I)

In Amplitude und Phase lauten die Bestimmungsgleichungen

$$r_{s,m}^2 = -\left[\lambda - \sum_n G_{jn} K \sin\beta + K \sum_n G_{jn} \cos(\Omega\ )\right]$$

$$\Omega_m = 1 + \gamma r_{s,m}^2 - \sum G_{jn} K \sin\beta + K \sum_n G_{jn} \sin(\Omega\ )]$$

$$\Omega = \beta - \Omega_m \tau + (n-j)\frac{2\pi m}{N}$$

wieder Annahme konstanter Zeilensumme

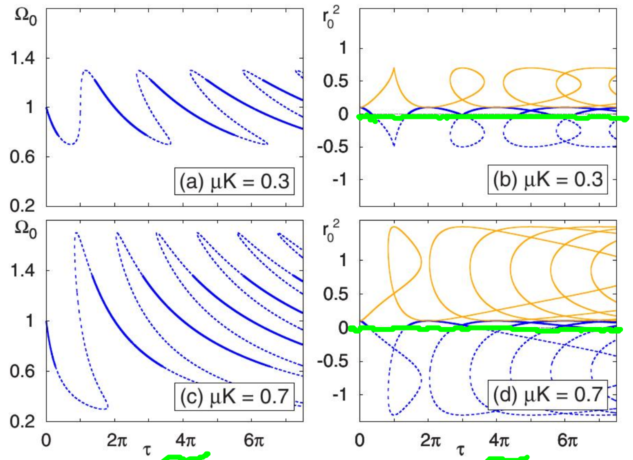
$$\sum_n G_{jn} = const = 1$$

damit im synchronen Zustand alle Elemente gleichen Eingang bekommen

Lösung für inphase Zustand (m=0)

Ω_0

Ω_0



τ τ

FIG. 1. (Color online) Collective frequency Ω_0 (left) and squared amplitude r_0^2 (right) of in-phase oscillation ($m=0$) vs time delay τ for different amplitude of the feedback strength [$\mu K=0.3$ and 0.7 in (a), (b) and (c), (d), respectively]. Black (blue) and gray (yellow) curves correspond to a feedback phase $\beta=0$ and $\beta=\Omega_0\tau$, respectively. Unphysical solutions ($r_0^2<0$) are dashed. For $\beta=\Omega_0\tau$ the curves in (a) and (c) have the same shape, but no unphysical solutions occur. Parameters: $\lambda=0.1$, $\omega=1$, and $\gamma=0$.

r_0^2 $\sigma = 0.3$

r_0^2 $\sigma = 0.7$

Blau $\beta = 0$

Orange $\beta = \Omega_0 \tau$

4.4.2 Stabilität der Lösungen

=> Kennen nun die Lösungen von Gl. I, wissen aber noch nichts über die Stabilität der Lösungen

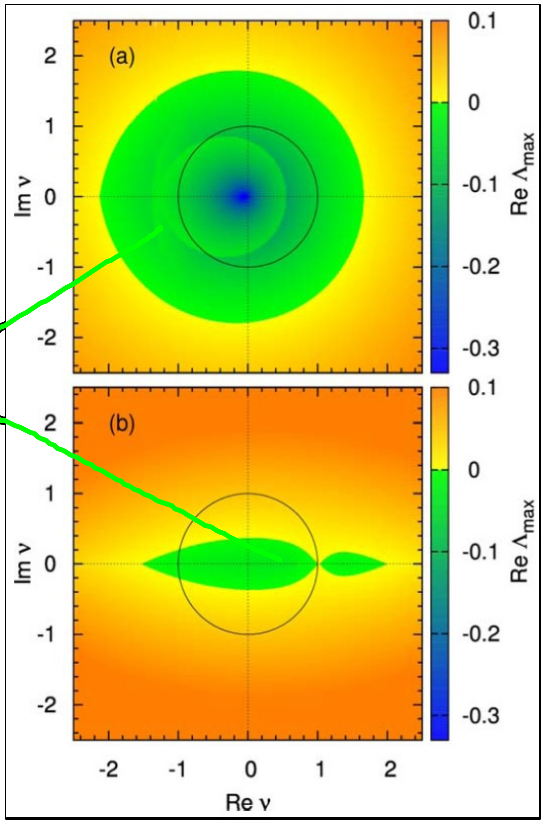
$\underbrace{\text{Stabilität der Lösungen}}_{\text{Berechnen mit MSF (master stability function, siehe 4.3.2)}}$

Erinnerung: MSF: größter Lyapunov-Exponent Λ_{max} als Funktion der Eigenwerte γ der Kopplungsmatrix G: $\Lambda_{max}(\gamma)$

Bem: • Hier Λ außerdem eine Funktion von K und τ, da die synchrone Mannigfaltigkeit von K und τ abhängt
• Berechnung von Λ_{max} hier analytisch möglich, da die Jacobi-Matrix der lokalen Dynamik zeitunabhängig ist

$m = 0$ (inphase Lösung)

stabiler Bereich



$\sigma = 0.3$
$\tau = 2\pi$

schwarze: unidirektionalen Ring

$\gamma_k = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right)$

Eigenwerte liegen auf dem Einheitskreis

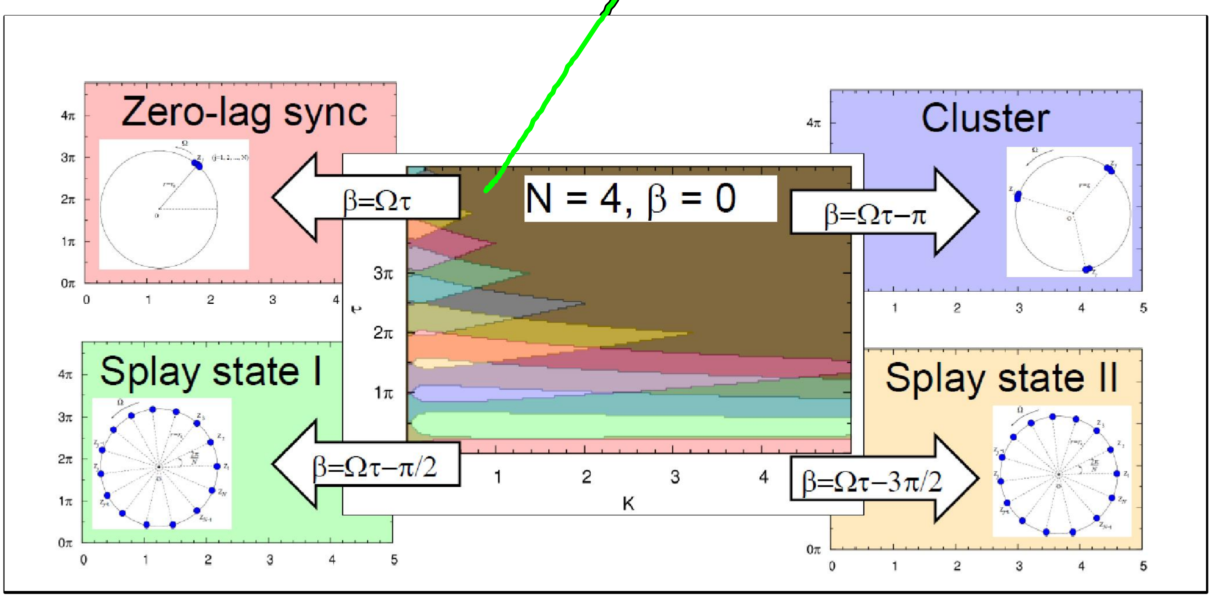
$\sigma = 0.08$
$\tau = 0.52\pi$

$\Rightarrow$ Für $\tau = 2\pi$ kann synchrone Lösung stabilisiert werden, wenn z.B. Topologie ein unidirektionaler Ring ist

Betrachten nun K–τ Ebene für einen unidirektionalen Ring

Für einen unidirektionalen Ring kann MSF auch für $m > 0$ berechnet werden

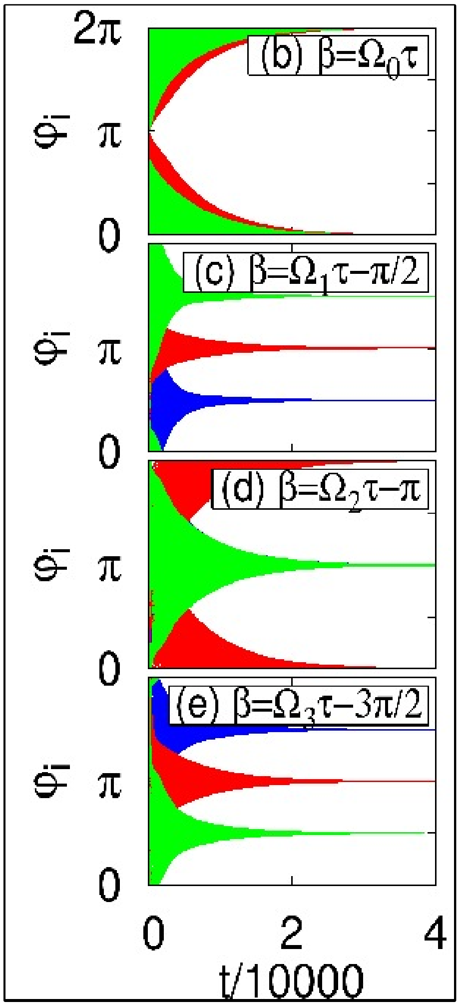
Multistabilität



rot zerolag
blau 2-Cluster
grün splay 1
gelb splay 2

$\Rightarrow \beta = \Omega_m \tau - \frac{2\pi m}{N}$ sichert Existenz und Stabilität in der ganzen K–τ-Ebene $(K, \tau > 0)$

Zeitserien



$\tau = 3\pi$ $\quad \sigma = 3$ (multistabiler Bereich falls $\beta < 0$)

φ_i relativ zu φ_1

Fazit

Stabilisierung einer Dynamik für geeignete Wahl von β

Maß für die Synchronisation (für inphase):

Kuramoto order parameter

$$R = 1/N \sum_j e^{i\varphi_j}$$

$|R| = 1$ inphase

$|R| \approx 0$ Desynchronisation oder aber z.B. Splay state

Zusammenfassung

- Netzwerke aus delay gekoppelten Hopfnormalformen
- mögliche Zustände: Inphase-, Cluster-, Splay-Zustände
- analytische Berechnung der gemeinsamen Frequenz und des Radius
- Stabilität über MSF
- geschickte Wahl von β $\Rightarrow$ Stabilisiert gewünschten Zustand in der gesamten K-τ-Ebene $(K, \tau > 0)$