

5. Wechselspiel von Zeitverzögerung und Rauschen

Bisher: determinist. dynam. Systeme

jetzt: stochast. dynam. Systeme

5.1 Rauschinduzierte Oszillation und Kohärenzresonanz

Stochast. Prozess

Zeitentwicklung einer Zufallsvar. $X(t)$

(\leftrightarrow im thermodyn. Gleichgewicht zeitunabh., Wahrscheinl.-verteilung durch Jaynes'sches Prinzip der variationalen Schätzung geg.: verallg. kanon. Verteilung $p_i = Z^{-1} e^{-\lambda M_i}$, M_i : Zufallsvar.)

Verbundwahrsch. zeitabhängig: $p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots)$

Realisierungen x_1, x_2, x_3, \dots von $X(t)$

Markoff - Prozess

$$p(x_1, t_1 | x_2, t_2; x_3, t_3; \dots) := \frac{p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots)}{p(x_2, t_2; \dots)} \quad \text{bedingte Wahrscheinl.}$$

$$= p(x_1, t_1 | x_2, t_2) \quad \text{hängt nur von der jüngsten Bed. ab}$$

$$t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots \quad \text{kein Gedächtnis!}$$

Langevin - Gleichung

fluktuierende stoch. Kraft $\xi(t)$ (Rauschen, noise)

z.B. Brown'sche Bewegung (1827)

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} + \xi(t)$$

Reibung Rauschen
Gauß'sches weißes Rauschen:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad \langle \dots \rangle = \text{statist. Mittelung}$$

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t-t') \quad \text{unkorrel.}$$

zentraler Grenzwertsatz: unkorrel. Zufallsvar. gehorchen einer Gaußverteilung

Autokorrel. fkt.

$$\mathcal{E}(s) := \langle (x(t) - \langle x \rangle)(x(t+s) - \langle x \rangle) \rangle$$

ergod. System: Ensemblemittel = Zeitmittel

$$\mathcal{E}(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt x(t) x(t+s) \quad (\text{hier } \langle x \rangle = 0)$$

$$\text{Fourier-Transform: } \hat{x}(\omega; T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T dt e^{i\omega t} x(t) \quad \text{in } t \in [-T, T]$$

spektrale Leistungsdichte (power spectral density)

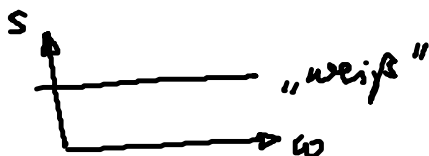
$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\hat{x}(\omega; T)|^2$$

$$\Rightarrow S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t) x(t+s) \rangle e^{i\omega s} ds$$

Wiener - Khinchin - Theorem

Gauß'sches weißes Rauschen $\xi(t)$:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \delta(s) e^{i\omega s} ds = \frac{1}{2\pi} = \text{const.}$$



Rauschinduzierte Oszillationen

1. Beispiel: System knapp unterhalb einer Hopf-Bifurkation
 Van der Pol.-Osz. (1926, el. Stromkreis)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (\varepsilon - x^2)y - \omega_0^2 x + D\xi(t) \end{cases}$$

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = D\xi(t)$$

D Rauschintensität
 $\xi(t)$ Gauß'sches weißes Rauschen

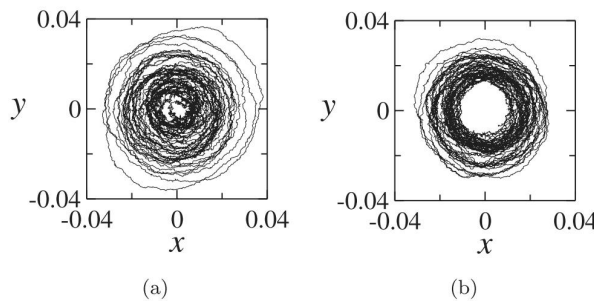
nichtlinearer Osz.,

$D=0$: Fixpkt. $x=y=0$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $\tau_A = \varepsilon$, $\det A = \omega_0^2 \varepsilon$
 $\varepsilon=0$ Hopf-Bif., $\varepsilon < 0$ stabiler Fokus
 $\varepsilon > 0$ instab. Fokus + LC

hier: $\varepsilon = -0.01$, $\omega_0 = 1$, $\lambda = \frac{\varepsilon}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \approx \frac{\varepsilon}{2} \pm i\omega_0$
 \Rightarrow keine determinist. Osz.

aber rauschinduzierte Osz. ($D \neq 0$)

lit. Janson, Balanos, Schöll: PRL 93, 010601 (2004)
 Balanos, Janson, Schöll: Physica D 199, 1 (2004)
 Schöll, Balanos, Janson: Stoch. Dyn. 5, 281 (2005)
 Janson, Balanos, Schöll: in Handbook of Chaos Control (2008)



rauschinduz.
 Osz.,
 (VdP)

Fig. 1. Numerically simulated phase portraits of noise-induced oscillations of the Van der Pol system at $\omega_0 = 1$, $\varepsilon = -0.01$, $D = 0.003$: (a) without feedback $K = 0$; (b) with feedback $K = 0.2$, $\tau = T_0$. In both cases the system was integrated during 300 time units.

2. Beispiel: anregbares System (Typ II)
FitzHugh-Nagumo-Modell (Neuron)

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} = x + a + D\xi(t) \end{cases}$$

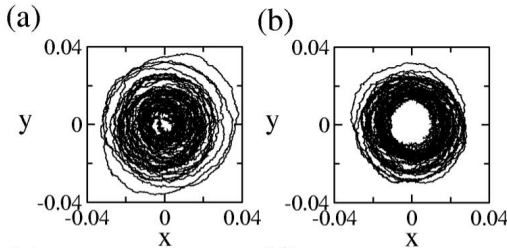
Zeitskalenverh $\epsilon \ll 1$ ($\epsilon = 0.01$)
Anreg.schwelle a ($a = 1.1$)

$D=0$: Fixpkt $x = -a, y = -a - \frac{a^3}{3}$

stabiler Knoten für $a > 1$
(anregbar)

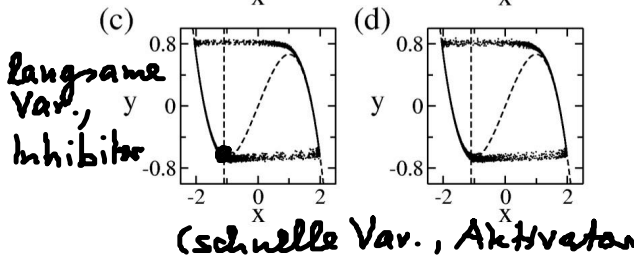
(hier nicht betrachtet:
 $a < 1$ instab. Fixpkt. + LC)

ohne Kontr. mit Kontr.



VdP

Lit: Janson, PRL (2004)



FHN

$D > 0$: rauschinduz. Osz.
(spiking von Neuronen)

FIG. 1. Phase portraits of noise-induced motion: (a),(b) Van der Pol oscillator at $D = 0.003$; (c),(d) FitzHugh-Nagumo system at $D = 0.09$ (the dashed lines denote the null isoclines), (a),(c) $K = 0$; (b),(d) $K = 0.2, \tau = T_0$.

Kohärenzresonanz (Pikovsky, Kurths: PRL 78, 775 (1997))

Hu, Ditinger, Ning, Haken: PRL 71, 807 (1993)

(stoch. Resonanz ohne ext. treibende period. Kraft)

konstruktiver Einfluss von Rauschen:

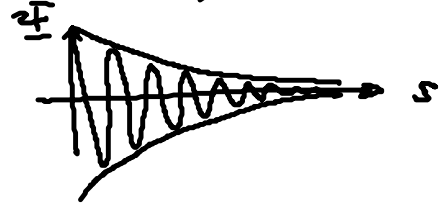
- Regularität („Kohärenz“) der rauschinduz. Osz. am größten für endl. Rauschintensität D_{opt} .
- Maß für Regularität:

$$\text{Korrelationszeit } t_{cor} = \frac{1}{\text{Varianz}} \int_0^{\infty} |\underline{\varphi}(s)| ds$$

Autokorrel. fkt. $\underline{\varphi}(s)$

(für lin. stoch. Prozess $\dot{x} = -(\lambda + i\omega_0)x + \xi(t)$)

$$\bar{x}(s) = \bar{x}(0) e^{-\lambda s} \cos \omega_0 s$$



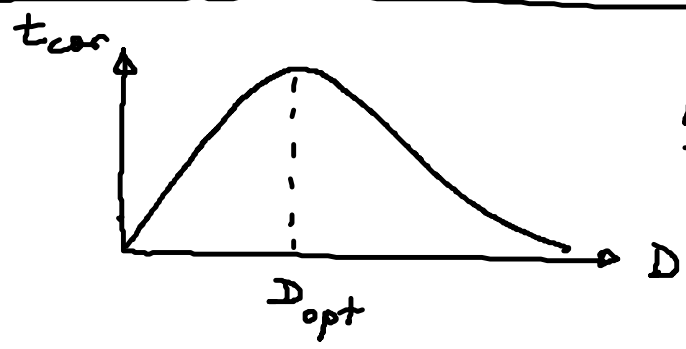
$$t_{cor} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} |\cos \omega_0 s| ds$$

Approx.: $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi = \frac{2}{\pi}$

füllfaktor für $\lambda \ll \omega_0$

$$t_{cor} \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} ds = \frac{2}{\pi \lambda}$$

$$\Rightarrow \bar{x}(s) = \bar{x}(0) e^{-\frac{2}{\pi} \frac{s}{t_{cor}}} \cos(\omega_0 s) \quad (\text{exp. abklingende Korrelation})$$



Kohärenzresonanz

z.B. FHN (nichtlinear)