

7.2 Kontrolle zeitverzögert gekoppelter Neuronen

Schöll, Hiller, Hövel, Dahlem: Phil. Trans. Roy. Soc. A 367, 1079 (2009)

$$\epsilon \dot{x}_1 = x_1 - \frac{x_1^3}{3} - y_1 + C [x_2(t - \tau^c) - x_1(t)] + K [x_1(t - \tau^k) - x_1(t)]$$

$$\dot{y}_1 = x_1 + a$$

$$\epsilon \dot{x}_2 = x_2 - \frac{x_2^3}{3} - y_2 + C [x_1(t - \tau^c) - x_2(t)] + K [x_2(t - \tau^k) - x_2(t)]$$

$$\dot{y}_2 = x_2 + a$$

kein Rauschen!

Anregbares Regime ($a = 1.05$): Einzelsystem hat stab. Fixpkt.

(i) keine Kontrolle ($K=0$)

gekoppeltes System: symm. Fixpkt. $x_i^* = -a$, $y_i^* = \frac{a^3}{3} - a$ stabil

$$\delta \dot{x} = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} A & -1 & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & -1 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \end{pmatrix} \delta x + \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta x(t - \tau^c)$$

$$A \equiv 1 - a^2 - C$$

char. Gl. $(1 - A\lambda + \epsilon\lambda^2)^2 - (\lambda C e^{-\lambda\tau^c})^2 = 0$

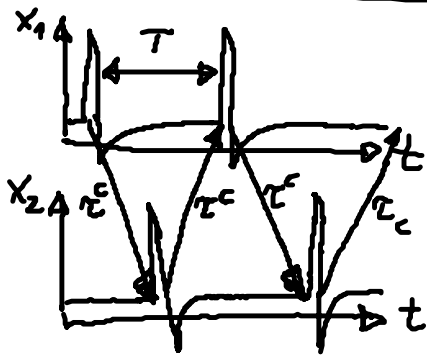
Faktorisierung! Keine Hopf-Bif., denn Ansatz $\lambda = i\omega$ in
Im der faktorierten char. Gl.:

$$A = \pm C \cos \omega \tau^c$$

$$A = -|a^2 + C - 1|, \quad |A| = \underbrace{a^2 - 1}_{> 0} + C > C$$

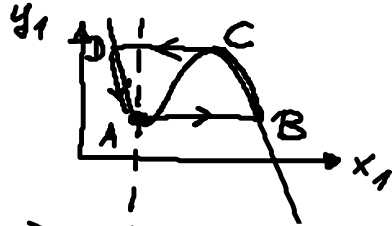
Obwohl der symm. Fixpkt. immer stabil ist, kann durch
Delay eine period. Osz. (Grenzzyklus) induziert werden
(globale Bif.):

Delay-induz. Antiphasen-Osz.: -----



Periode $T = 2\tau^c$ (vorausgesetzt, τ^c ist groß genug > recovery time (Refraktärzeit))

Näherung für Pulsbreite:



Pulsbreite B → C

- B $\hat{=}$ x = 2
- D $\hat{=}$ x = -2
- C $\hat{=}$ x = 1

langsame Phasen B → C (firing), D → A (refraktär): $y_1 \approx x_1 - \frac{x_1^2}{3}$ (x_1 -Nullisokline)

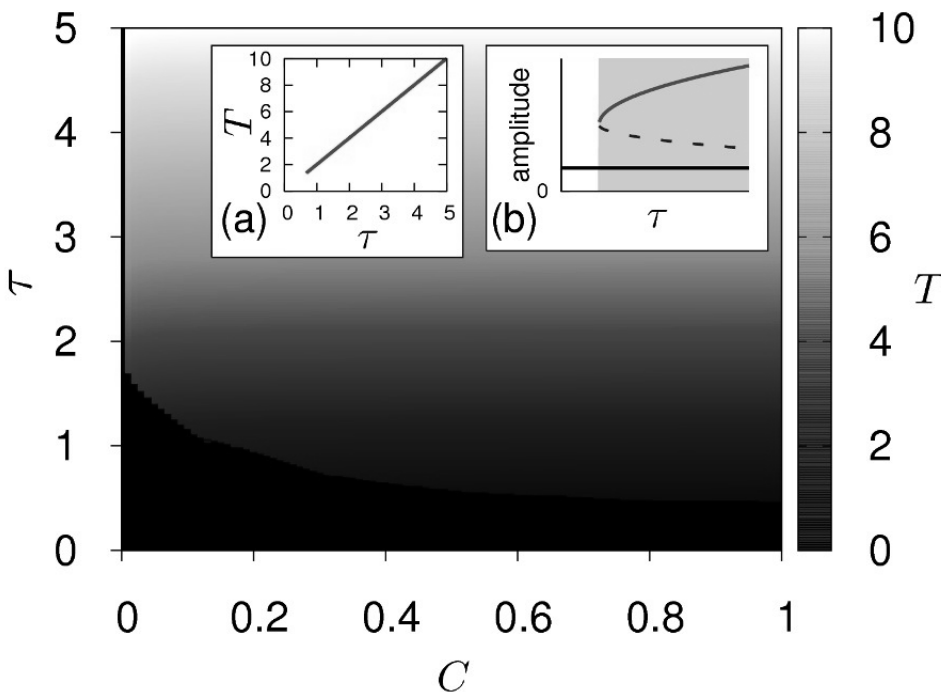
$$\Rightarrow \dot{y}_1 = \dot{x}_1(1 - x_1^2) = x_1 + a$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{x_1 + a}{1 - x_1^2} \Rightarrow \frac{1 - x_1^2}{x_1 + a} dx_1 = dt$$

$$\int_{\pm 2}^x dx_1 \frac{1 - x_1^2}{x_1 + a} = (a^2 - 1) \ln \frac{a \pm 2}{a + x} - a(\pm 2 - x) + 2 - \frac{x^2}{2} = t$$

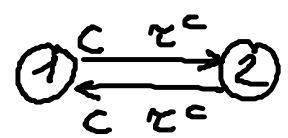
Pulsbreite B → C:

$$T_f = \int_2^1 dx_1 \frac{1 - x_1^2}{x_1 + a} = (a^2 - 1) \ln \frac{a + 2}{a + 1} - a + \frac{3}{2}$$



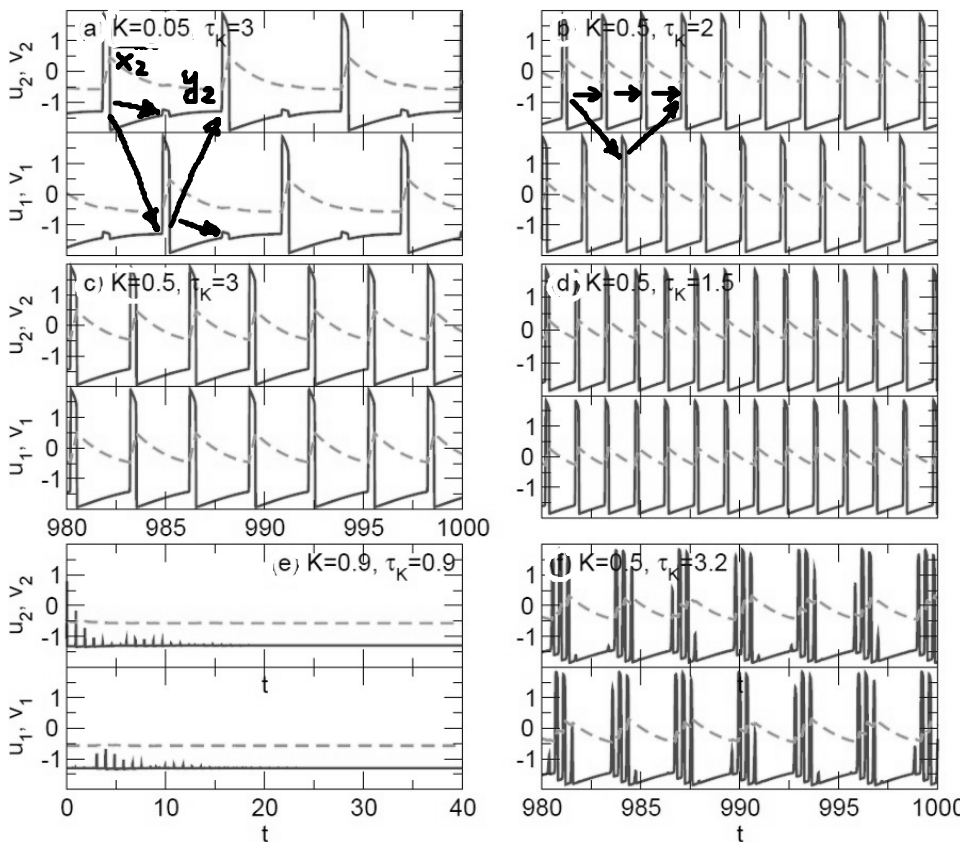
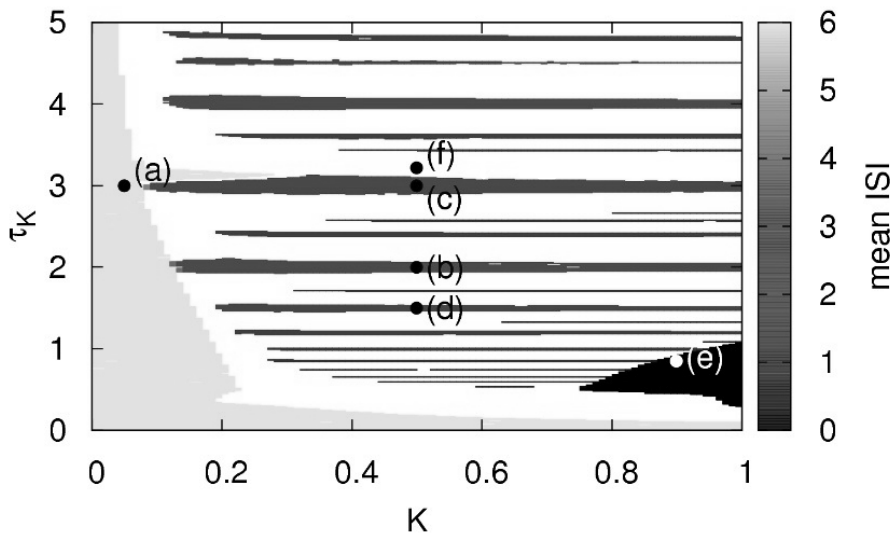
Delay-induzierte Antiphasen-osz.

$$T = 2\tau^c$$



Mit zeitverzögerter Rückkopplungskontrolle K, τ^K :

Kopplungspar.
 $C = 0.5, \tau^c = 3$



- $C = 0.5, \tau^c = 3$
- (a) Selbstkoppl.:
 unterschwellige
 Anregung nach
 $t = \tau^K$; volle Spike
 durch Köppl. nach $T = 2\tau^c$
 - (c) $K = 0.5$: Selbstkoppl.
 stärker \Rightarrow Spike
 nach $T = \tau^K = \tau^c$
 gleichphasige DSE.
 - (b) Spikes mit
 $3T = 2\tau^c = 3\tau^K$
 Antiphasen-DSE.
 - (d) $4T = 2\tau^c = 4\tau^K$
 gleichphasig mit
 $T = 1.5$
 - (e) amplitude death
 (keine DSE.)
 - (f) bursting
 (bei nichtrationalem
 Verhältnis τ^K/τ^c)

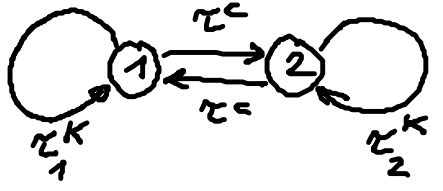
Fazit: Kopplung u. Rückkoppl.kontrolle
 führen zu reichhaltigen Szenarien,
 gleich-/gegenphasige Synchronis.

bursting, amplitude death
Resonanzen zwischen τ^K und τ^C :

$$\boxed{N^K \tau^K = N^C 2\tau^C} \quad N^K, N^C \in \mathbb{N} \quad (\text{verallg. Synchronis.})$$

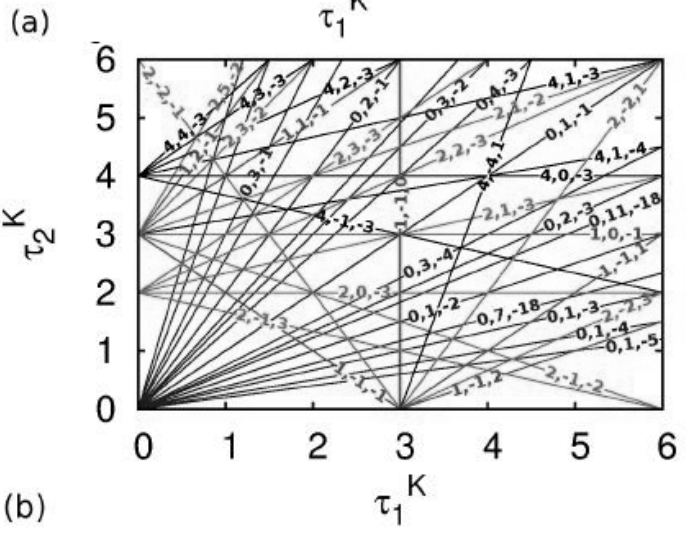
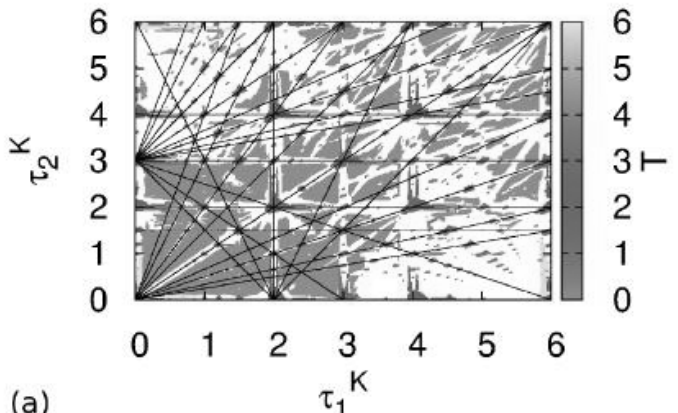
$$T_{|S|} \text{ (Periode)} : T = \frac{2\tau^C}{N^K} = \frac{\tau^K}{N^C}$$

Verschiedene Selbstkopplungs-Verzögerungszeiten τ_1^K, τ_2^K :



$$\boxed{l\tau^C + m\tau_1^K + n\tau_2^K = 0} \quad l, m, n \in \mathbb{Z}$$

z.B. festes τ^C :



Resonanzlinien
 $l, m, n \in \mathbb{Z}$

FIG. 11: (Color online) (a) Interspike intervals T in the (τ_1^K, τ_2^K) -plane for $\tau^C = 3, K = 0.5$. The black lines are added according to Eq. (31); (b) resonance lines given by Eq. (31) including the integer values of l, m , and n . Other parameters as in Fig. 2.