

## 7.2 Kontrolle zeitverzögert gekoppelter Neuronen

Schöll, Hiller, Hövel, Dahlem: Phil. Trans. Roy. Soc. A 367, 1079 (2009)

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{x}_1 &= x_1 - \frac{x_1^3}{3} - y_1 + C [x_2(t - \tau^c) - x_1(t)] + K [x_1(t - \tau^k) - x_1(t)] \\ \dot{y}_1 &= x_1 + a \\ \epsilon \dot{x}_2 &= x_2 - \frac{x_2^3}{3} - y_2 + C [x_1(t - \tau^c) - x_2(t)] + K [x_2(t - \tau^k) - x_2(t)] \\ \dot{y}_2 &= x_2 + a \end{aligned}$$

kein Rauschen!

Anregbares Regime ( $a = 1.05$ ): Einzelsystem hat stab. Fixpkt.

(i) keine Kontrolle ( $K=0$ )

gekoppeltes System: symm. Fixpkt.  $x_i^* = -a$ ,  $y_i^* = \frac{a^3}{3} - a$  stabil

$$\delta \dot{x} = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} A & -1 & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & -1 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \end{pmatrix} \delta x + \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta x(t - \tau^c)$$

$$A \equiv 1 - a^2 - C$$

char. Gl.  $(1 - A\lambda + \epsilon\lambda^2)^2 - (\lambda C e^{-\lambda\tau^c})^2 = 0$

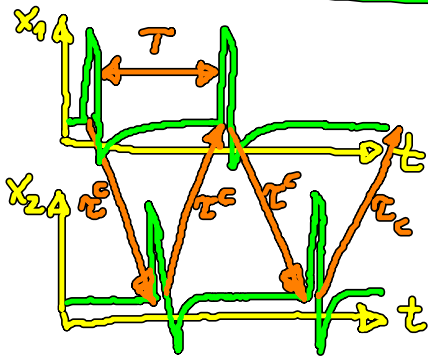
Faktorisierung! Keine Hopf-Bif., denn Ansatz  $\lambda = i\omega$  in  
Im der faktoriisierten char. Gl.:

$$A = \pm C \cos \omega \tau^c$$

$$A = -|a^2 + C - 1|, \quad |A| = \underbrace{a^2 - 1}_{>0} + C > C$$

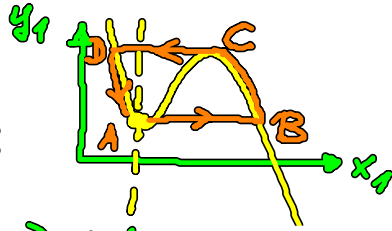
Obwohl der symm. Fixpkt. immer stabil ist, kann durch  
Relay eine period. Osz. (Grenzzyklus) induziert werden  
(globale Bif.):

# Delay-induz. Antiphasen-Osz.:



Periode  $T = 2\tau^c$  (vorausgesetzt,  $\tau^c$  ist groß genug > recovery time (Refraktärzeit))

## Näherung für Pulsbreite:



Pulsbreite  $B \rightarrow C$

- $B \hat{=} x = 2$
- $D \hat{=} x = -2$
- $C \hat{=} x = 1$

langsame Phasen  $B \rightarrow C$ ,  $D \rightarrow A$  (firing) :  $\dot{y}_1 \approx x_1 - \frac{x_1^2}{3}$  ( $x_1$ -Nullisokline)  
refraktär:

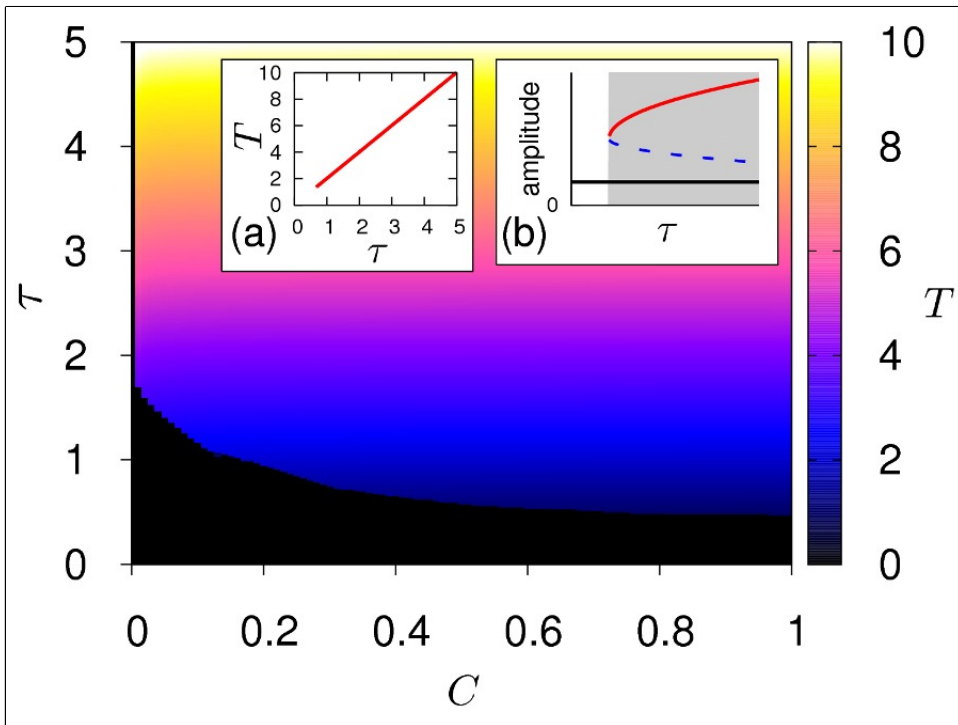
$$\Rightarrow \dot{y}_1 = \dot{x}_1(1 - x_1^2) = x_1 + a$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{x_1 + a}{1 - x_1^2} \Rightarrow \frac{1 - x_1^2}{x_1 + a} dx_1 = dt$$

$$\int_{\pm 2}^x dx_1 \frac{1 - x_1^2}{x_1 + a} = (a^2 - 1) \ln \frac{a \pm 2}{a + x} - a(\pm 2 - x) + 2 - \frac{x^2}{2} = t$$

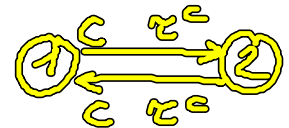
Pulsbreite  $B \rightarrow C$ :

$$T_f = \int_2^1 dx_1 \frac{1 - x_1^2}{x_1 + a} = (a^2 - 1) \ln \frac{a + 2}{a + 1} - a + \frac{3}{2}$$

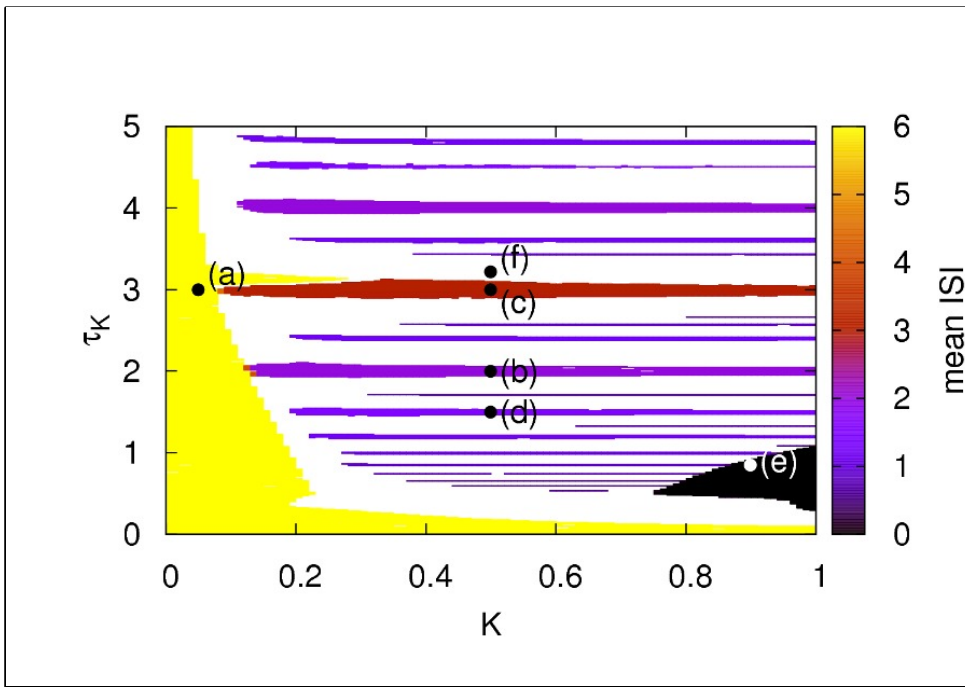


Delay-induzierte Antiphasen-Osz.

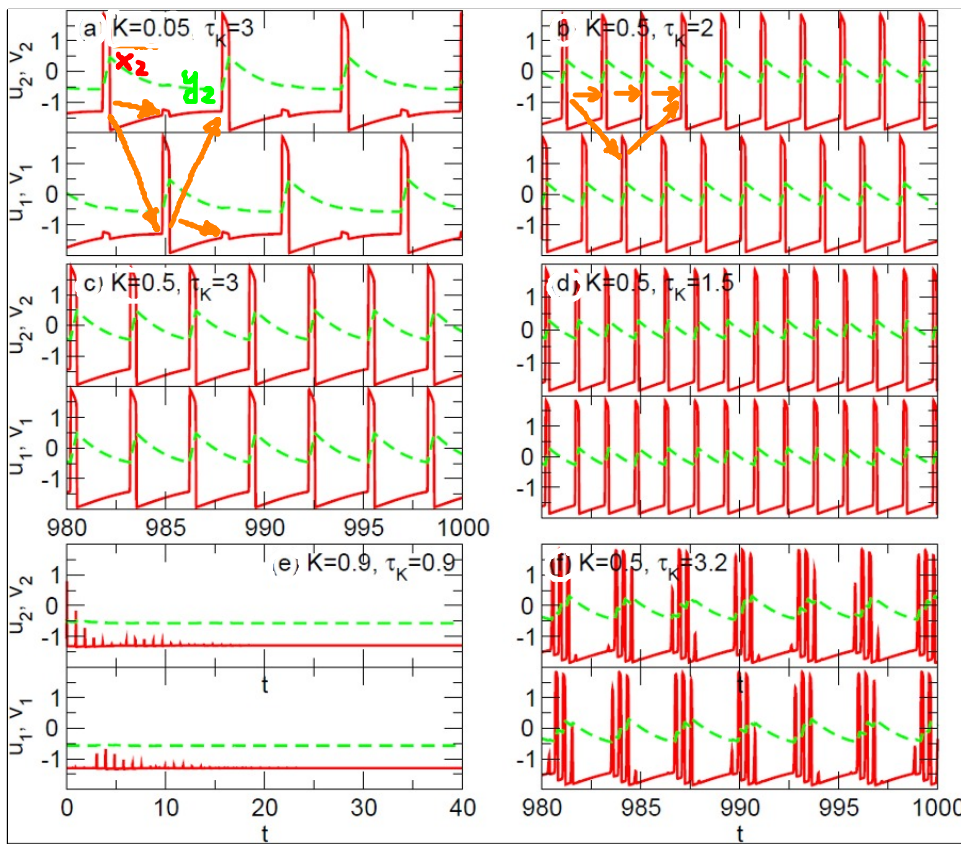
$$T = 2\tau^c$$



Mit zeitverzögerter Rückkopplungskontrolle  $K, \tau^K$ :



Kopplungspar.  
 $C = 0.5, \tau^c = 3$



- $C = 0.5, \tau^c = 3$
- (a) Selbstkoppl.:  
 unterschwellige  
 Anregung nach  
 $t = \tau^K$ , volle Spike  
 durch Koppl. nach  $T = 2\tau^c$
  - (c)  $K = 0.5$ : Selbstkoppl.  
 Stärke  $\Rightarrow$  Spike  
 nach  $T = \tau^K = \tau^c$   
 gleichphasige Dsz.
  - (b) Spikes mit  
 $3T = 2\tau^c = 3\tau^K$   
 Antiphase-Dsz.
  - (d)  $4T = 2\tau^c = 4\tau^K$   
 gleichphasig mit  
 $T = 1.5$
  - (e) amplitude death  
 (keine Dsz.)
  - (f) bursting  
 (bei nicht-rationalen  
 Verhältnis  $\tau^K/\tau^c$ )

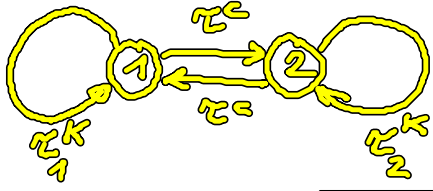
Fazit: Kopplung u. Rückkoppl.kontrolle  
 führen zu reichhaltigen Szenarien,  
 gleich-/gegenphasige Synchronis.,

bursting, amplitude death  
Resonanzen zwischen  $\tau^K$  und  $\tau^C$ :

$$N^K \tau^K = N^C \tau^C \quad N^K, N^C \in \mathbb{N} \quad (\text{verallg. Synchronis.})$$

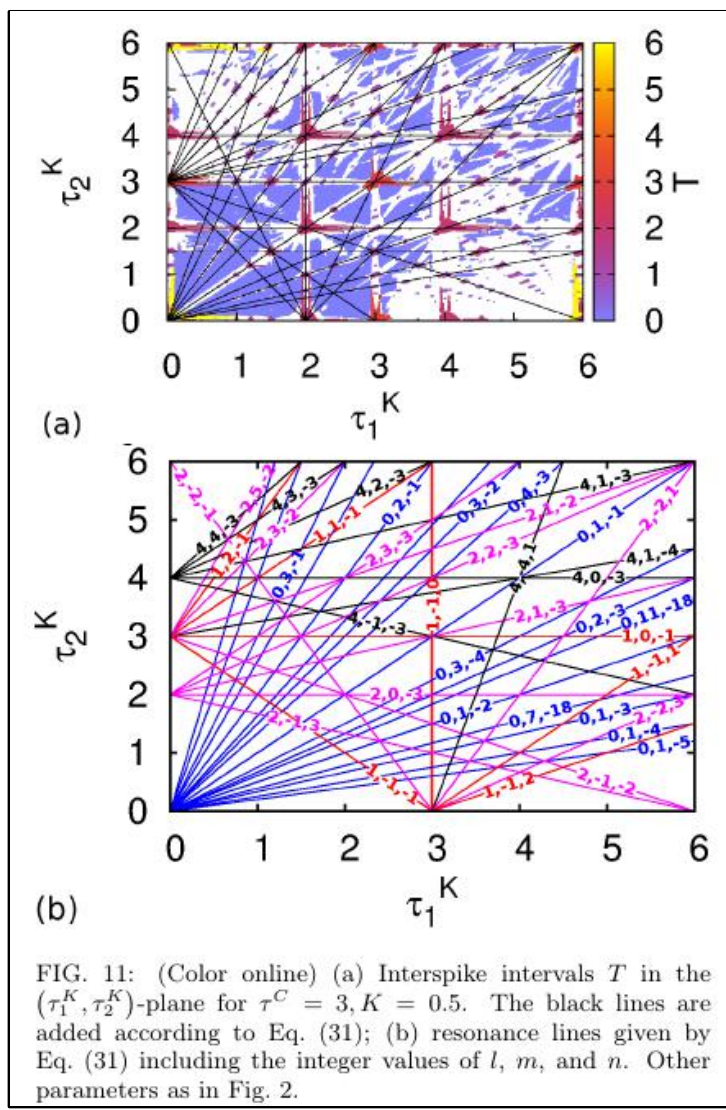
$$T_{ISI} \text{ (Periode)} : T = \frac{2\tau^C}{N^K} = \frac{\tau^K}{N^C}$$

Verschiedene Selbstkopplungs-Verzögerungszeiten  $\tau_1^K, \tau_2^K$ :



$$l\tau^C + m\tau_1^K + n\tau_2^K = 0 \quad l, m, n \in \mathbb{Z}$$

z.B. festes  $\tau^C$ :



Resonanzlinien  
 $l, m, n \in \mathbb{Z}$

FIG. 11: (Color online) (a) Interspike intervals  $T$  in the  $(\tau_1^K, \tau_2^K)$ -plane for  $\tau^C = 3, K = 0.5$ . The black lines are added according to Eq. (31); (b) resonance lines given by Eq. (31) including the integer values of  $l, m$ , and  $n$ . Other parameters as in Fig. 2.