4.2 Die BBGKY-Hierachie

- $$\rho_s(q_1, p_1, \dots, q_s, p_s, t) = \int \prod_{i=s+1}^{N} dV_i \; \rho(q_1, p_1, \dots q_{s+1}, p_{s+1}, \dots q_N, p_N, t)$$

  mit $dV_i = d^3q_i \, d^3p_i$ (4.8)

$$f_s = \frac{N!}{(N-s)!} \rho_s$$ ... s-Teilchendichte (4.9)

- Bew.glg. für f_s bzw ρ_s:

$$H = H_s + H_{N-s} + H'$$

$$H_s = \sum_{i=1}^{s} \left[\frac{p_i^2}{2m} + U(q_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_{(i,j)=1}^{s} V(q_i - q_j)$$

$$H_{N-s} = \sum_{i=s+1}^{N} [\quad \dots \quad] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=s+1}^{N} \quad "$$

$$H' = \sum_{n=1}^{s} \sum_{m=s+1}^{N} V(q_n - q_m)$$

(ii) Bew.glg.

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = \int \prod_{i=s+1}^{N} dV_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \underset{(4.5)}{=} - \int \prod_{i=s+1}^{N} dV_i \, \{ \rho, H_s + H_{N-s} + H' \}$$

1

2

3

$$1 = \left\{ \int \prod_{i=s+1}^{N} dV_i \, \rho, H_s \right\} \underset{(4.8)}{=} \{ \rho_s, H_s \}$$

$$② \; -\int \prod_{i=s+1}^{N} dV_i \; \underbrace{\{\varrho, H_{N-s}\}}_{\sum_{j=s+1}^{N}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial q_j}\cdot\frac{p_j}{m} - \frac{\partial \varrho}{\partial p_j}\cdot\frac{\partial H_{N-s}}{\partial q_j}\right)} = 0 \, !$$

Oberflächenterm $=0$ Oberflächenterm $=0$

$$\int dq_\alpha \frac{\partial \varrho}{\partial q_\alpha} = \varrho\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$③ \; -\int \prod_{i=s+1}^{N} dV_i \; \underbrace{\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial q_j}\cdot\underbrace{\frac{\partial H'}{\partial p_j}}_{=0} - \frac{\partial \varrho}{\partial p_j}\cdot\frac{\partial H'}{\partial q_j}\right)}$$

$$-\sum_{n=1}^{s}\frac{\partial \varrho}{\partial p_n}\cdot\underbrace{\sum_{m=s+1}^{N}\frac{\partial V(q_m-q_n)}{\partial q_n}}_{(N-s)\frac{\partial V(q_n-q_{s+1})}{\partial q_n}} - \sum_{m=s+1}^{N}\underbrace{\frac{\partial \varrho}{\partial p_m}}_{\text{Oberflächenterm}=0}\cdot\sum_{n=1}^{s}\dots\dots$$

$$= -(N-s)\sum_{n=1}^{s}\int dV_{s+1}\,\frac{\partial V(q_n-q_{s+1})}{\partial q_n}\cdot\frac{\partial}{\partial p_n}\underbrace{\left[\int\prod_{i=s+2}^{N} dV_i\,\varrho\right]}_{\varrho_{s+1}}$$

(4.11)

$$-(①+②+③) \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial \varrho_s}{\partial t} - \{H_s,\varrho_s\} = (N-s)\sum_{n=1}^{s}\int dV_{s+1}\,\frac{\partial V(q_n-q_{s+1})}{\partial q_n}\cdot\frac{\partial \varrho_{s+1}}{\partial p_n}}$$

bzw.: (4.11) $\xrightarrow{\frac{N!}{(N-s)!}}$

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial f_s}{\partial t} - \{H_s, f_s\}}_{\text{„Strömungsterm"}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{s}\int dV_{s+1}\,\frac{\partial V(q_n-q_{s+1})}{\partial q_n}\cdot\frac{\partial f_{s+1}}{\partial p_n}}_{\text{„Stoßterm"}}} \quad (4.12)$$

der s Teilchen mit restlichen N−s Teilchen

⟶ Hierarchie von Gln.

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}\dots = \dots f_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} \ldots = \ldots f_3$$

$$\vdots$$

$\longrightarrow$ zur Behandlung ist Abbruchbedingung nötig!

4.3 Die Boltzmann-Gleichung

4.3.1 „Herleitung" bzw. Motivation

- Bewgl. für f_1: (4.12)

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \{H_1, f_1\} = \int dV_2 \; \frac{\partial V(q_1 - q_2)}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial p_1} \quad (4.13)$$

- Abbruchbedingung + „Vergröberung":

$$f_2(q_1, p_1, q_2, p_2, t) \longrightarrow f_1(q, p_1, t)\, f_1(q, p_2, t) \quad (4.14)$$

Bem: (i) Annahme: Potential $V(q_1 - q_2)$ hat eine endliche Reichweite d

$\longrightarrow$ $q_1 - q_2 \gg d$ keine 2-Teilchen-Korrelationen

$\hat{=}$ molekulares Chaos

(ii) Führe ein: Stoßpkt. q der Teilchen

$\longrightarrow$ Vergröberung der Längenskala
" " Zeitskala

} Stoß wird räumlich/zeitlich nicht aufgelöst
$\hat{=}$ Informationsverlust

- Abkürzungen:

$$\left.\begin{aligned} &(i)\; f_1(q, p_1, t) = f(q, p, t) = f \\ &\quad\; f_i(q, p_i, t) = f(q, p_i, t) = f_i \quad , \; i \geq 2 \end{aligned}\right\} \quad (4.15)$$

$$\left.\begin{aligned} &(ii)\; \{H_1, f\} = \frac{\partial H_1}{\partial q} \cdot \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial H_1}{\partial p} \cdot \frac{\partial f}{\partial q} \qquad , \; H_1 = \frac{p^2}{2m} + U(q) \\ &\qquad = -\underline{F} \cdot \underline{\nabla}_p f - \frac{p}{m} \cdot \underline{\nabla}_q f \qquad \text{mit } \underline{F} = -\underline{\nabla}_q U \;\text{... äußere Kraft} \end{aligned}\right\} \quad (4.16)$$

- Boltzmann-Gl.: (4.15), (4.16) in (4.13)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m} p \cdot \underline{\nabla}_q + \underline{F} \cdot \underline{\nabla}_p \right) f(q, p, t) = \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Stoß}}$$

$$\text{mit } \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{Stoß}} = \int d^3p_2\, d^3p_3\, d^3p_4 \; K(p, p_2; p_3, p_4) \left[f_3 f_4 - f f_2 \right] \qquad (4.17)$$

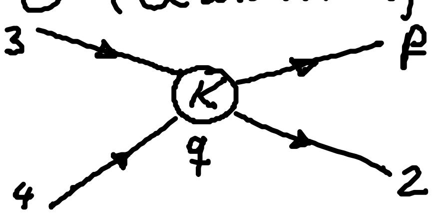
$$= G - V \qquad \text{... Boltzmannsche Stoßzahlansatz}$$

$\left.\begin{matrix} G \\ V \end{matrix}\right\} d^3q\, d^3p$ ... Zahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit $\left.\begin{matrix} \text{in} \\ \text{aus} \end{matrix}\right\}$ Volumen $d^3q\, d^3p$ $\left.\begin{matrix} \text{hinein} \\ \text{heraus} \end{matrix}\right\}$ gestreut werden

Bedeutung: Änderung von f durch Stoßprozesse:

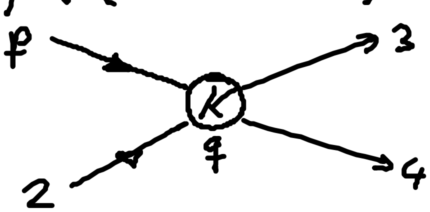
$K(p, p_2; p_3, p_4)$ ... Übergangswahrscheinlichkeit für $p_3, p_4 \rightarrow p, p_2$

(i) G (Gewinnterm)



„erzeugt" Teilchen mit Impuls p

(ii) V (Verlustterm)



„vernichtet" Teilchen mit Impuls p

(iii) $K(\ldots)\, f_i\, f_j\, d^3p_2\, d^3p_3\, d^3p_4$ ... Zahl der Stoßprozesse pro Zeiteinheit im Volumen $d^3p_2\; d^3p_3\;\, d^3p_4$

- Symmetrien von K:

  (i) Vertauschbarkeit der Teilchen:

$$K(p_1, p_2; p_3, p_4) = K(p_2, p_1; p_4, p_3) \qquad (4.18)$$

  (ii) Isotropie des Raumes: sei $D \in O(3)$

$$K(Dp_1, Dp_2; Dp_3, Dp_4) = K(p_1, p_2; p_3, p_4) \qquad (4.19)$$

  insbesondere: $Dp = -p$

  (iii) Zeitumkehrinvarianz:

$$K(p_1, p_2; p_3, p_4) = K(-p_3, -p_4; -p_1, -p_2) \qquad (4.20)$$

(ii), (iii) $\longrightarrow$ $K(p_1, p_2; p_3, p_4) = K(p_3, p_4; p_1, p_2) \qquad (4.21)$

- genaue Herleitung von (4.17) aus BBGKY-Hierarchie:

  s. M. Kardar, Statistical Physics of Particles