Boltzmann-Gl.:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m}\,p\cdot\nabla_q + \underline{F}\cdot\nabla_p\right) f(q,p,t) = \left.\frac{df}{dt}\right|_{\text{Stoß}}$$

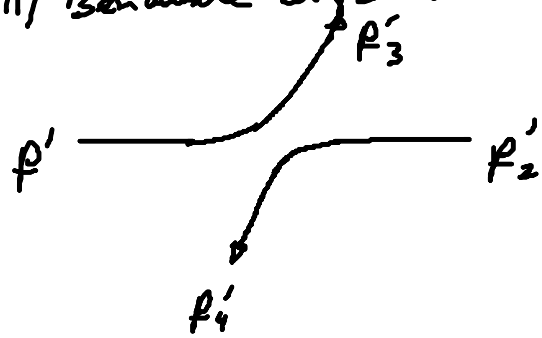
$$\text{mit } \left.\frac{df}{dt}\right|_{\text{Stoß}} = \int d^3p_2\, d^3p_3\, d^3p_4\; K(p,p_2;p_3,p_4)\,\left[f_3 f_4 - f f_2\right] \qquad (4.17)$$

- Explizite Gestalt des Stoßterms:

(i) Impuls- und Energieerhaltung:

$$K(p,p_2;p_3,p_4) \sim \delta(p+p_2-p_3-p_4)\,\delta\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2m}-\frac{p_3^2}{2m}-\frac{p_4^2}{2m}\right)$$

(ii) Behandle Stoß im Schwerpkt.system (')



$$p' + p_2' = 0 = p_3' + p_4'$$

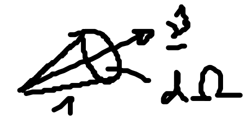
Relativkoordinate: Streuung eines Teilchens am anderen
hier: 2 an 1
(vgl. Keplerproblem)

Intensität des Teilchenstrahls:

I = Zahl der einfallenden Teilchen 2 mit Impuls p_2 pro Zeit und Fläche

$$= \underbrace{f(q, p_2)}_{f_2} d^3 p_2 \, |v - v_2|$$

$dN(\hat{v})$ ... Zahl der pro Zeit in das Raumelement $d\Omega$ um Richtung $\hat{v}$ gestreuten Teilchen



$\longrightarrow$ differentieller Streuquerschnitt:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{I} \frac{dN}{d\Omega}} \quad (4.23)$$

$$dN = I \, d\Omega \, \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

$\xrightarrow{\text{z.B.}}$ Verlustterm:

$$V = - \int dN \, f(q, p, t) \overset{(4.23)}{=} - \int d\Omega \left| \frac{d\sigma}{d\Omega} \right| I f$$

$$= - \int d\Omega \, d^3 p_2 \left| \frac{d\sigma}{d\Omega} \right| |v - v_2| \, f f_2$$

$G = \ldots$

$$\Longrightarrow \boxed{\left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Stoß}} = \int d^3 p_2 \, d\Omega \left| \frac{d\sigma}{d\Omega} \right| |v - v_2| \Big[\underbrace{f(q, p_3, t) f(q, p_4, t)}_{f_3 f_4} - \underbrace{f(q, p, t) f(q, p_2, t)}_{f f_2} \Big]} \quad (4.24)$$

Bem: $f(q, p_3, t) f(q, p_4, t)$

über Erhaltungssätze verknüpft mit p, p_2

hier wichtig: nur vor dem Stoß „molekulares Chaos"

d.h. keine Korrelationen

4.3.2 Das H-Theorem

• **Theorem:**

Falls $f(q,p,t)$ die Boltzmann-Gleichg erfüllt, gilt

für $\quad H(t) = \int d^3q\, d^3p\, f(q,p,t) \ln f(q,p,t)$,

daß $\quad \dfrac{dH}{dt} \leq 0.$ (4.25)

$\longrightarrow$ Boltzmann Gl. beschreibt irreversible Vorgänge, obwohl die zugrunde liegenden mikroskop. Gln. reversible Prozesse erlauben!

• **Beweis:**

$$\frac{dH}{dt} = \int dV \left(\frac{\partial f}{\partial t} \ln f + f \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial t} \right)$$

$$= \int dV \frac{\partial f}{\partial t} (1 + \ln f)$$

$$= -\int dV (1+\ln f) \left(\frac{1}{m} p \cdot \nabla_q + F \cdot \nabla_p \right) f + \int dV \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Stoß}} (1 + \ln f)$$

$$= -\int dV \left(\frac{1}{m} p \cdot \nabla_q + F \cdot \nabla_p \right) (f \ln f) + \quad ''$$

Oberflächenterm $= 0$

da $f \ln f \to 0$ für $f \to 0$

$$\longrightarrow \frac{dH}{dt} \overset{(4.17)}{=} - \int \underbrace{d^3q_1\, d^3\overset{p}{p_1}}_{dV}\, d^3p_2\, d^3p_3\, d^3p_4\; K(p_1, p_2; p_3\, p_4) \left[\overset{f}{f_1} f_2 - f_3 f_4 \right] (1 + \ln f_1)$$

$f = f_1$

$q = q_1$

$p = p_1$

K invariant unter $\begin{matrix} 1 \leftrightarrow 2 \\ 3 \leftrightarrow 4 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} 1 \leftrightarrow 3 \\ 2 \leftrightarrow 4 \end{matrix}$

$\longrightarrow$ $f_2 f_1 - f_4 f_3$

$f_3 f_4 - f_1 f_2$

$f_4 f_3 - f_2 f_1$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{4} \int d^3q_1\, d^3p_1 \cdots \underbrace{K(\ldots)}_{\geq 0} \underbrace{\left[f_1 f_2 - f_3 f_4 \right] \ln \frac{f_1 f_2}{f_3 f_4}}_{\geq 0}} \quad (4.26)$$

$$\longrightarrow \frac{dH}{dt} \leq 0 \quad \text{qed}$$

- Bemerkungen:

(i) $-H \sim$ Informationsentropie

$-H \sim$ Boltzmann-Entropie für $f =$ konstant (s. Kap. 5.1)

H-Theorem ist Bsp. für Entropiezuwachs

(ii) Grund für Irreversibilität:

(1) Annahme des molekularen Chaos

(2) „Vergröberung" der Längen- und Zeitskala

Verlust an Information über System

4.3.3. Gleichgewichtseigenschaften

(i) Gleichgewichtsverteilungen:

- Gas im Gleichgewicht, falls $\frac{dH}{dt} = 0$

$$\xrightarrow{(4.26)} f_1 f_2 = f_3 f_4 \longrightarrow \underbrace{\ln f_1 + \ln f_2}_{\substack{\text{vor} \\ \text{nach}}} = \underbrace{\ln f_3 + \ln f_4}_{\substack{\text{nach} \\ \text{vor}}} \quad \text{Stoß}$$

erfüllt durch additive Größen, die bei Stoß erhalten:

$\longrightarrow$ Stoßinvarianten:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \chi^i = p_i & i = 1,2,3 & \ldots \text{Impuls} \\ \chi^4 = \frac{p^2}{2m} & & \ldots \text{kinetische Energie} \\ \chi^5 = 1 & & \ldots \text{Teilchenzahl} \end{array}} \quad (4.27)$$

$$\longrightarrow \ln f = a(q) + \underline{\alpha}(q) \cdot \underline{p} - \beta(q) \frac{p^2}{2m}$$

$$\longrightarrow \quad f(q,p) = \underset{\uparrow \atop e^{a(q)}}{N(q)} \exp\left[\underline{\alpha}(q)\cdot p - \beta(q)\frac{p^2}{2m}\right] \quad (4.28)$$

• lokales Gleichgewicht:

Normierung: $\int d^3p\, f(q,p) = n(q,t)$ ... Teilchenzahldichte

$$n \overset{(4.28)}{=} N(q)\left[\int dp_i \exp\left(\alpha_i p_i - \beta\frac{p_i^2}{2m}\right)\right]^3$$

$$= N(q)\left[\int_{-\infty}^{\infty} dp_i \exp\left\{-\frac{\beta}{2m}\left(p_i - \frac{m\alpha_i}{\beta}\right)^2 + \frac{m\alpha_i^2}{2\beta}\right\}\right]^3$$

$$n = N(q)\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\exp\left(\frac{m\alpha^2}{2\beta}\right) \quad (4.28a)$$

$\xrightarrow{\text{Umbenennungen}}$ in (4.28a) in (4.28)

$$\boxed{\begin{aligned} & f(q,p,t) = n(q,t)\frac{1}{[2\pi m k_B T]^{3/2}}\exp\left[-\frac{(p - m\underline{u}(q,t))^2}{2mk_BT(q,t)}\right] \\ & \text{mit } n(q,t) \text{ ... Teilchenzahldichte} \\ & \qquad k_BT(q,t) = \beta^{-1} \text{ ... lokale Temperatur (s.u.)} \\ & \qquad m\underline{u}(q,t) = \langle p\rangle = \frac{m\alpha}{\beta} \text{ ... lokaler mittlerer Impuls} \end{aligned}} \quad (4.28)$$

... lokale Maxwell-Verteilung

" Gleichgewichtsverteilung