4.3.3 Gleichgewichtseigenschaften

(i) Gleichgewichtsverteilungen

- Stoßinvarianten:

$$\boxed{\begin{aligned} \chi^i &= p_i && i=1,2,3 \ \dots \text{Impuls} \\ \chi^4 &= \frac{p^2}{2m} && \dots \text{kinetische Energie} \\ \chi^5 &= 1 && \dots \text{Teilchenzahl} \end{aligned}} \quad (4.27)$$

$$\xRightarrow{\frac{dH}{dt}=0} \boxed{f(q,p,t) = n(q,t)\,\frac{1}{[2\pi m k_B T(q,t)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{(p-mu(q,t))^2}{2mk_BT(q,t)}\right]} \quad (4.28)$$

mit $n(q,t)$ ... Teilchenzahldichte

$k_BT(q,t) = \beta^{-1}$ ... lokale Temperatur (s.u.)

$m\underline{u}(q,t) = \langle p \rangle = \frac{m\gamma}{\beta}$ ... lokaler mittlerer Impuls

... lokale Maxwell-Verteilung

" Gleichgewichtsverteilung

- globales Gleichgewicht: (für Gas im Volumen V mit „$u=0$")

$$(4.13) \quad \left.\frac{df}{dt}\right|_{\text{Stoß}} = 0 \quad \hat{=} \ (4.28)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \ \wedge \ \{H_1, f\} = 0$$

Boltzmann Gl.:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \{H_1, f\} = \underbrace{\left.\frac{df}{dt}\right|_{\text{Stoß}}}_{=0}$$

lokales GG

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} n = \frac{N}{V} &= \text{konstant} \\ T &= \text{"} \\ \underline{u} &= 0 \end{aligned}$$

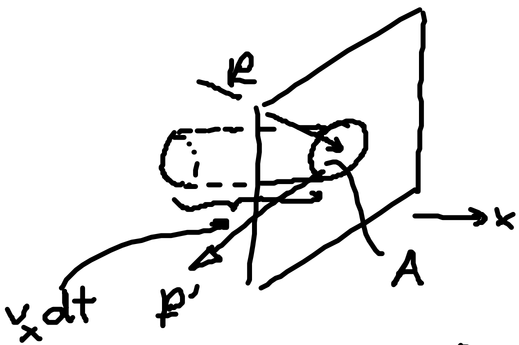
$$\longrightarrow \boxed{f(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \frac{n}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{p}^2}{2 m k_B T}\right)} \qquad (4.30)$$

... Maxwellverteilung!

original: $\mathbf{p} \to m\mathbf{v}$

(ii) <u>Zustandsgleichung</u>: für Gas mit N Teilchen im Vol. V

- Druck $\hat{=}$ Kraft auf Wand von reflektierten Teilchen



Zahl der Teilchen mit $\mathbf{p}$, die A treffen in dt:

$$dN(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})\, d^3p\, \underbrace{(A v_x dt)}_{\text{Volumen von Teilchen, die A treffen}}$$

$$\longrightarrow F = \int_0^\infty dp_x \int_{-\infty}^\infty dp_y \int_{-\infty}^\infty dp_z\, f(\mathbf{p}) \left(A \frac{p_x}{m} dt\right) \underbrace{\frac{2p_x}{dt}}_{\text{Kraft von der Wand für Impulsänderung in x-Richtung}}$$

$$\longrightarrow P = \frac{F}{A} = \underbrace{\int_{-\infty}^\infty dp_x \int_{-\infty}^\infty dp_y \int_{-\infty}^\infty dp_z}_{\int d^3p}\, f(\mathbf{p}) \frac{p_x^2}{m} \overset{(4.30)}{=} \frac{n}{\beta} \longleftarrow (k_B T)^{-1}$$

$$\xrightarrow[n = \frac{N}{V}]{} \boxed{PV = N k_B T \,, \quad \text{falls } \beta = \frac{1}{k_B T}} \qquad (4.31)$$

Identifikation von T über ideale Gasgleichung!

4.4 Hydrodynamische Bewegungsgleichungen

• Weg ins Gleichgewicht:

(i) auf Zeitskala der Stöße τ_c

$$\underbrace{f_2(\ldots)}_{\text{2-Teilchendichte}} = \underbrace{f_1(\ldots)}_{\text{1-Teilchendichte}} f_1(\ldots) \quad \text{für } |q_1 - q_2| \gg \text{Reichweite Ww-Potential}$$

(ii) in mittlere stoßfreie Zeit $\tau \gg \tau_c$

Stoßinvariante gelten $\xrightarrow[\text{in}]{\text{Relaxation}}$ lokales GG

mit $n(q,t)$, $T(q,t)$

lokale Erwartungswerte

$$\langle A(q,t)\rangle = \int d^3p \underbrace{f(q,p,t)}_{\substack{\text{lokale Max-}\\\text{wellverteilung (4.29)}}} A(q,p,t)$$

bestimmt durch Stoßterm $\left.\frac{df}{dt}\right|_{\text{Stoß}}$ in $\underbrace{(4.17)}_{\text{Boltzmann-Gl.}}$

(iii) Dynamik auf Zeiten $\tau_H \gg \tau$:

bestimmt durch Strömungsterm in (4.17)

$\xrightarrow[\text{in}]{\text{Relaxation}}$ globales GG

τ_H bestimmt durch Zeitentwicklung von Erhaltungsgrößen = hydrodynamische Variable

4.4.1 Erhaltungssätze

(4.32)

(4.32)

- Stoßinvarianten $\longrightarrow$ Erhaltungsgrößen

$\chi^5 = 1 \longrightarrow$ Teilchenzahldichte $n(q,t) \equiv \int d^3p \; 1 f := \langle 1 \rangle$

$\chi^i = p_i \longrightarrow$ Impulsdichte $= m \times$ Teilchenstromdichte $j_i(q,t)$

$$j_i(q,t) \equiv n(q,t)\, u_i(q,t) = \int d^3p \, \frac{p_i}{m} f = \left\langle \frac{p_i}{m} \right\rangle$$

$\chi^4 = \frac{p^2}{2m} \longrightarrow$ Energiedichte

$$n(q,t)\Big[\underbrace{\frac{m\,\underline{u}^2(q,t)}{2}}_{\substack{\text{kinetische Energie}\\ \text{der lokalen}\\ \text{konvektiven}\\ \text{Strömung}}} + \underbrace{e(q,t)}_{\substack{\text{innere Energie}\\ \text{pro Teilchen}\\ =\text{mittlere kinetische}\\ \text{Energie im lokalen}\\ \text{Ruhesystem}}}\Big] = \int d^3p \, \frac{p^2}{2m} f = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle$$

$$\text{mit } ne = \frac{m}{2} \int d^3p \left(\frac{p}{m} - \underline{u}\right)^2 f = \Big\langle \frac{m}{2} \big(\underbrace{\frac{p}{m} - \underline{u}}_{\underline{c}}\big)^2 \Big\rangle$$

wobei $\langle \underline{c} \rangle = 0$

Beweis:

$$ne = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle + \overset{\langle 1 \rangle}{n}\, \frac{m}{2} \underline{u}^2 - \underline{u} \cdot \underbrace{\langle p \rangle}_{mn\underline{u}}$$

$$\longrightarrow ne = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle - \frac{m}{2} \underline{u}^2 \quad \text{qed}$$

- Bilanzgleichungen für Erhaltungsgrößen:

allgemein: $\int d^3p$ Boltzmann Gl. (4.17) $\times \chi^\alpha$

$$\int d^3p \left.\frac{df}{dt}\right|_{\text{Stoß}} \chi^\alpha = 0$$

1. Stoßinvariante
2. explizite Beweis wie bei H-Theorem

$$\longrightarrow \int d^3p\, \chi^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m}\underline{p}\cdot\underline{\nabla}_q + \underbrace{\underline{F}\cdot\underline{\nabla}_p\right] f(q,p,t)}_{=\underline{F}\cdot\left[\underbrace{\underline{\nabla}_p(\chi^\alpha f)}_{\hookrightarrow \text{ Oberflächenterm } = 0} - f\,\underline{\nabla}_p \chi^\alpha\right]} = 0$$

$$\frac{\partial \chi^\alpha}{\partial t} = 0 = \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial q} \longrightarrow \int d^3p \left[\frac{\partial}{\partial t}(\chi^\alpha f) + \frac{1}{m}\underline{p}\cdot\underline{\nabla}_q(\chi^\alpha f) - f\,\underline{F}\cdot\underline{\nabla}_p \chi^\alpha\right] = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\langle \chi^\alpha\rangle}_{\text{Dichte}} + \underbrace{\underline{\nabla}_q \cdot \frac{1}{m}\langle \underline{p}\,\chi^\alpha\rangle}_{\text{div (Stromdichte)}} = \underbrace{\underline{F}\cdot\langle \underline{\nabla}_p \chi^\alpha\rangle}_{\text{Quelle/Senke}}} \qquad (4.33)$$

... Bilanzgleichung für Dichte $\langle \chi^\alpha \rangle$

Anwendung:

(i) Teilchenzahlerhaltung: $\chi^5 = 1 \xrightarrow[(4.33)]{(4.32)}$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t} n + \underline{\nabla}_q \cdot \underline{j} = 0 \\ \text{mit } \underline{j} = n\underline{u} = \left\langle \frac{\underline{p}}{m} \right\rangle\end{gathered}} \qquad (4.34)$$

... Kontinuitätsgleichung