4.4.1 Erhaltungssätze

- Erhaltungsgrößen:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\chi^5 = 1 \longrightarrow \text{Teilchenzahldichte } n(q,t) = \int d^3p \; 1 \, f := \langle 1 \rangle \\
&\chi^i = p_i \longrightarrow \text{Impulsdichte} = m \times \text{Teilchenstromdichte } j_i(q,t) \\
&\qquad j_i(q,t) \equiv n(q,t)\, u_i(q,t) = \int d^3p \, \frac{p_i}{m} f = \left\langle \frac{p_i}{m} \right\rangle \\
&\chi^4 = \frac{p^2}{2m} \longrightarrow \text{Energiedichte:} \\
&\qquad n(q,t)\left[\frac{m\, u^2(q,t)}{2} + e(q,t)\right] = \int d^3p \, \frac{p^2}{2m} f = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle \\
&\qquad \text{mit } ne = \frac{m}{2}\int d^3p \left(\frac{p}{m} - u\right)^2 f = \left\langle \frac{m}{2}\Big(\underbrace{\frac{p}{m} - u}_{c}\Big)^2 \right\rangle \\
&\qquad \text{wobei } \langle c \rangle = 0!
\end{aligned}} \quad (4.32)$$

Boltzmann-Gl. $\longrightarrow$

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\langle \chi^\alpha \rangle}_{\text{Dichte}} + \underbrace{\nabla_q \cdot \frac{1}{m}\langle p\, \chi^\alpha \rangle}_{\text{div (Stromdichte)}} = \underbrace{F \cdot \langle \nabla_p \chi^\alpha \rangle}_{\text{Quelle / Senke}}} \quad (4.33)$$

... Bilanzgl. für Dichte $\langle \chi^\alpha \rangle$

Anwendung auf

(i) Teilchenzahlerhaltung: $\chi^5 = 1 \xrightarrow[(4.33)]{(4.32)}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla_q \cdot j = 0 \\ &\qquad \text{mit } j = n u = \left\langle \frac{p}{m} \right\rangle \end{aligned}} \quad (4.34)$$

.. Kontinuitätsgleichung

(ii) Impulserhaltung: $\chi^i = p_i \quad i = 1,2,3 \xrightarrow[(4.33)]{(4.32)}$

$$m \frac{\partial}{\partial t} j_i + \frac{1}{m} \nabla_j \langle p_i \, p_j \rangle = \underbrace{n F_i}_{\text{weil } F_j \nabla_{p_j} p_i = F_j \delta_{ij} = F_i} \qquad \text{mit } \nabla_i = (\nabla_q)_i$$

$$m^2\langle(\underline{u}+\underline{c})_i(\underline{u}+\underline{c})_j\rangle \underset{\langle c_i\rangle=0}{=\!=} m^2 n\, u_i u_j + m^2\langle c_i c_j\rangle$$

$$\boxed{\underbrace{m\frac{\partial}{\partial t} j_i}_{\text{Impulsdichte}} + \underbrace{\nabla_j\big(\underbrace{mnu_i}_{mj_i}\, u_j - T_{ij}\big)}_{\text{Impulsstromdichte}} = n F_i} \qquad (4.35)$$

$mnu_iu_j = mj_i\, u_j$ ... konvektiver Anteil = Impulsdichte × Geschw.

$T_{ij} = -m\langle c_i c_j\rangle$ ... Spannungstensor (=- Drucktensor)

nF_i ... Volumenkraftdichte äußerer Kräfte

Umschreibung: (4.35)

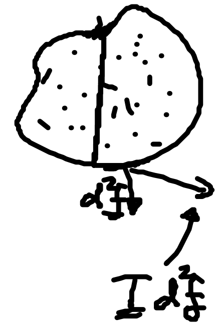
$$m\frac{\partial}{\partial t} n u_i + \nabla_j(mnu_iu_j)$$

$$= mn\frac{\partial}{\partial t}u_i + \underbrace{mu_i\frac{\partial}{\partial t}n + mu_i\nabla_j(nu_j)}_{= mu_i\left(\frac{\partial}{\partial t}n + \nabla_j(nu_j)\right) \overset{(4.34)}{=} 0} + mnu_j\nabla_j u_i$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\underbrace{mn}_{\text{Massendichte}}\underbrace{\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \overbrace{\underline{u}\cdot\nabla_{\underline{q}}}^{\text{konvektive}}\Big)u_i}_{\text{totale / materielle Zeitableitung}} = \underbrace{\nabla_j T_{ij}}_{\text{Oberflächenkräfte!}} + nF_i} \qquad (4.36)$$

$\left[\int d^3q\, \nabla_j T_{ij} \overset{\text{Gauß}}{=\!=} \oint T_{ij}\, d^2f_j\ !\right]$

z.B. Druck-/Reibungskräfte



(4.36) ≡ Newtonsche Grundgleichung

linke Seite: Beschleunigung eines Volumenelements mit Geschw. $\underline{u}$

$$\text{denn: } \frac{d}{dt} u_i(q,t) = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \underbrace{\dot{q}_j}_{u_j} \nabla_j u_i$$

rechte Seite: Oberflächen (= innere) + äußere Kräfte auf Vol.element

(iii) Energieerhaltung: $\chi^4 = \frac{p^2}{2m}$

(1) $$\frac{1}{m}\langle p_i \chi^5 \rangle = \langle (u_i + c_i) \frac{p^2}{2m} \rangle$$

$$= u_i \langle \frac{p^2}{2m} \rangle + \frac{m}{2} \langle c_i \overbrace{(u_j + c_j)^2}^{\cancel{u_j^2} + 2u_j c_j + c_j^2} \rangle$$

$$\overset{(4.32)}{\underset{\langle c_i \rangle = 0}{=}} n u_i \left(\frac{m}{2} \underline{u}^2 + e \right) + \underbrace{m\, u_j \langle c_i c_j \rangle}_{-u_j T_{ij}} + \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle$$

(2) $$\langle \underline{\nabla}_p \frac{p^2}{2m} \rangle = \langle \frac{p}{m} \rangle = j = n\underline{u}$$

(4.37)

$$\xrightarrow[\text{in } (4.33)]{\text{mit } (1)(2)} \quad \frac{\partial}{\partial t}\langle \frac{p^2}{2m} \rangle$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left[n\left(\frac{m}{2}\underline{u}^2 + \underline{e}\right)\right] + \nabla_i \underbrace{\left[\underbrace{n u_i \left(\frac{m}{2}\underline{u}^2 + e\right)}_{\text{konvektiver Anteil}} \underbrace{- T_{ij} u_j}_{\text{innere Kräfte}} + \underbrace{q_i}_{\text{Wärmestrom}} \right]}_{\text{Energiestromdichte}} = \underbrace{j \cdot \underline{E}}_{\text{Leistung der äußeren Kräfte}}}$$

mit $\boxed{q_i = \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle}$ ... Wärmestromdichte (4.37b)

Umformung mit Hilfe von (4.34) & (4.36): o.B.

$$\longrightarrow \boxed{\underbrace{n\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u}\cdot\underline{\nabla}\right) e}_{\text{zeitl. Änderung der inneren Energie für bewegtes Vol.element}} = \underbrace{-\underline{\nabla}\cdot \underline{q}}_{\text{Wärmefluß}} + \underbrace{T_{ij} \nabla_i u_j}_{\text{mechan. Leistung der inneren Kräfte}}} \quad (4.38)$$

[Vgl.: innere Energie $dU = đQ + đW$]

4.4.2 Hydrodynamische Gleichungen ohne Dissipation

- Materialgesetze für Spannungstensor $\underline{\underline{T}}$ und Wärmestromdichte $\underline{q}$ und e:

  $\equiv$ explizite Berechnung mit $f(\underline{q}, \underline{p}, t)$

Annahme: lokales GG:

$$f_0(\underline{q}, \underline{p}, t) = \frac{n}{[2\pi m k_B T]^{3/2}} \exp\Big[-\underbrace{\frac{(\underline{p} - m\underline{u})^2}{2m k_B T}}\Big] \qquad (4.29)$$

mit $n, T, \underline{u} = n, T, \underline{u}(\underline{q}, t)$ $\quad \xrightarrow{\underline{c} = \frac{\underline{p}}{m} - \underline{u}} \quad \Big[-\frac{c^2}{2k_B T/m}\Big]$

Bemerkung: $\left.\frac{df_0}{dt}\right|_{\text{Stoß}} = 0$, aber $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m}\underline{p}\cdot\underline{\nabla}_q + \underline{F}\cdot\underline{\nabla}_p\right) f_0 \neq 0$