$$S(k) \approx \frac{1}{c_2} \frac{1}{\xi^{-2}+k^2} \qquad (6.70)$$

$$\xi(T) \sim (T-T_c)^{-\gamma/2} \quad \text{für } T \to T_c \qquad (6.71)$$

(2) Deutung von ξ:

$$h(r) \overset{(6.65)}{=} \frac{1}{\varrho} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} \left[S(k)-1\right]$$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \quad \boxed{h(r) \overset{(6.70)}{\approx} \frac{1}{4\pi\varrho c_2} \frac{e^{-r/\xi}}{r} - \left[\frac{1}{\varrho}\delta(\underline{r})\right]} \qquad (6.72)$$

... Yukawa-Form der Korrelationen mit Reichweite ξ!

(3) bei $T=T_c$:

$$\text{„}\xi = \infty\text{"} \longrightarrow \boxed{h(r)\Big|_{T_c} \sim \frac{1}{r} \quad \text{bzw} \quad S(k)\Big|_{T_c} \sim \frac{1}{k^2}} \qquad (6.73)$$

... algebraischer Abfall

= weitreichende Korrelationen!

• Messung von $S(k)$:

für Streuintensität $I(k)$ gilt: $$\boxed{\frac{1}{I(k)} \overset{(6.48)}{\sim} \frac{1}{S(k)} = c_2\left(\xi^{-2}+k^2\right)} \qquad (6.74)$$

bestätigt durch Experiment! Bsp. Argon

• sehr nahe T_c und sehr kleine k:

Abweichung von (6.74) im Experiment.

Renormierungsgruppentheorie:

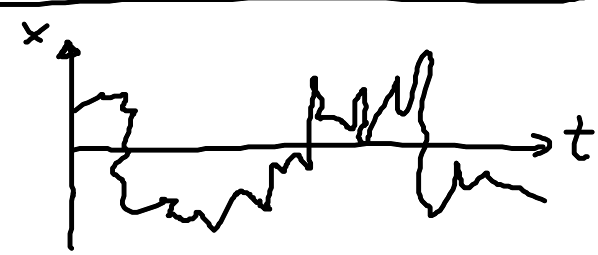
$$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{ll} h(r)\big|_{T_c} \sim \dfrac{1}{r^{1+\eta}} & \\ & \text{mit } \eta = 0.04 \\ S(k)\big|_{T_c} \sim \dfrac{1}{k^{2-\eta}} & \end{array}} \qquad (6.75)$$

7. Theorie der linearen Antwort & Fluktuations-Dissipations-theorem

• Lit:
1. David Chandler, Introduction to Modern Stat. Mechanics
2. Hansen & McDonald
3. Original Lit: R. Kubo, J. Phys. Soc. Jap $\underline{12}$, 570 (1957)

• Motivation:

Dynamik eines Systems <u>nahe</u> am thermischen GG Antwort auf einwirkende Kraft $x = \chi F$	$\longleftrightarrow$	Eigenschaften des Systems <u>im</u> thermischen GG $\langle x(0)\, x(t)\rangle$ ... Zeitkorrelationsfunktion

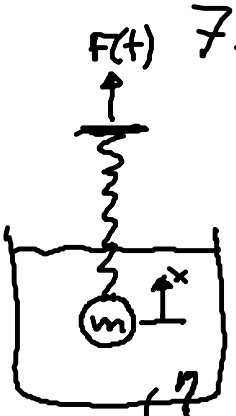


$\langle \ldots \rangle$ über viele Realisierungen von $x(t)$ im thermischen GG

NB: Ergodenhypothese:

$$\langle x(0)\, x(t)\rangle = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} x(t')\, x(t'+t)\, dt'$$

7.1 Modellsystem: harmonischer Oszillator



viskose Flüssigkeit (Wärmebad)

Newtonsche Grundgleichung:

$$m\ddot{x} + \alpha \dot{x} + m\omega_0^2 x = F(t) \quad (7.1)$$

$\alpha = 6\pi\eta a$ .. Reibungskoeffizient

a ... Radius Kugel

ω_0 ... Eigenfrequenz

- Behandlung im Komplexen: $x \in \mathbb{C}$
- Lösung von (7.1) für harmonische Kraft:

$$\left.\begin{aligned} F(t) &= F(\omega)\, e^{-i\omega t} \\ \text{Lsg. Ansatz} \quad x(t) &= x(\omega)\, e^{-i\omega t} \end{aligned}\right\} \longrightarrow (7.1) \qquad \text{mit } \boxed{\frac{\alpha}{m} = 2\gamma}$$

$$\longrightarrow \quad m\left(-\omega^2 - 2\gamma i\omega + \omega_0^2\right) x(\omega) = F(\omega)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(\omega) &= \chi(\omega)\, F(\omega) \\ \text{mit} \quad \chi(\omega) &= \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma)} \\ &= \chi'(\omega) + i\,\chi''(\omega) \end{aligned}} \quad (7.2)$$

... dynamische Suszeptibilität

Antwortfunktion

NB:

$[Fx]$ = Energie

· Greensche Fkt.:

$$\left.\begin{aligned}\text{bel. Kraft:}\quad & F(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega)\, e^{-i\omega t} \\ \text{Auslenkung:}\quad & x(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} x(\omega)\, e^{-i\omega t}\end{aligned}\right\} \text{Fouriertrafo (FT)}$$

$$(7.2) \xrightarrow[\text{der FT}]{\text{Faltungssatz}} \boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-t')\, F(t')\, dt'} \quad (7.3)$$

$$\text{mit} \quad \chi(\tau) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \chi(\omega)\, e^{-i\omega\tau}$$

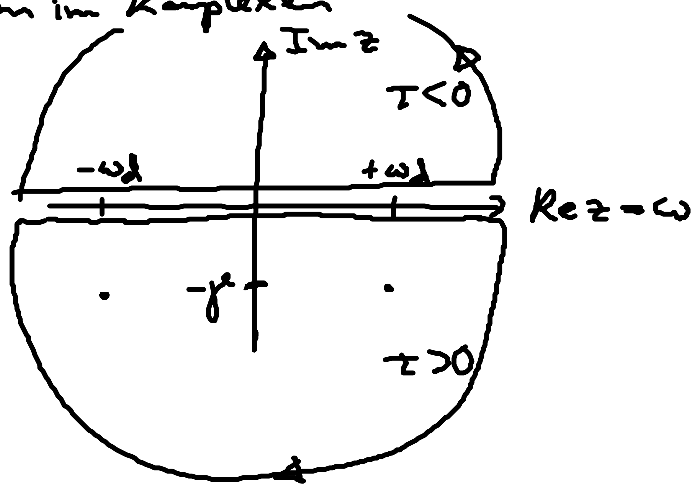
... Greensche Fkt. von (7.1)

Bem.: (i) $\chi(\tau)$ ist Lsg. von (7.1) für $F(t') = \delta(t')$

(ii) Kausalität: $\chi(\tau) = 0$ für $\tau < 0$!

· Bestimmung von $\chi(\tau)$: Integration im Komplexen

$$\boxed{\begin{aligned}\chi(\omega) &= \frac{1}{-m(\omega-\omega_+)(\omega-\omega_-)} \\ \text{mit } \omega_\pm &= -i\gamma \pm \omega_d \\ \omega_d &= \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\end{aligned}}$$



$$\longrightarrow \chi(\tau) = \oint \frac{dz}{2\pi} \chi(z)\, e^{-iz\tau} - \underbrace{\int \ldots dz}_{=0}$$

$$= 2\pi i \sum \mathrm{Res}\, \chi(z)\, e^{-iz\tau} - \underbrace{\int \ldots dz}_{=0}$$

$$\longrightarrow \quad \tau < 0: \quad 0$$

$$\tau > 0: \quad \frac{i}{2m\omega_d} e^{-\gamma\tau} \left[e^{-i\omega_d \tau} - e^{i\omega_d \tau} \right]$$

$$\longrightarrow \boxed{\chi(\tau) = \underset{\uparrow}{\Theta}(\tau)\, \frac{1}{m\omega_d}\, e^{-\gamma\tau} \sin\omega_d\tau} \quad (7.5)$$

$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$

Stufenfkt. $\Theta(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0 \\ 1, & \tau > 0 \end{cases}$

- Energiedissipation: Sei $F(t) = \mathrm{Re}\left[\underbrace{F(\omega)}_{\in\mathbb{R}} e^{-i\omega t}\right]$

$$\longrightarrow \quad x(t) = \mathrm{Re}\left[\chi(\omega) F(\omega) e^{-i\omega t}\right]$$

mittlere verrichtete Leistung von $F(t)$ am Oszillator in Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\bar{N} = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,\dot{x}(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T F(\omega)\cos\omega t \;\; \mathrm{Re}\left[-i\omega\,\chi(\omega) F(\omega)(\cos\omega t - i\sin\omega t)\right] dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T F^2(\omega)\cos\omega t\left[\chi'(\omega)(-\omega)\sin\omega t + \omega\,\chi''(\omega)\cos\omega t\right] dt$$

$$= F^2(\omega)\,\omega\,\chi''(\omega)\,\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\underbrace{\omega t}_{x})\,dt}_{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx \,=\, \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underset{\uparrow}{1} = 1$$

$\cos^2 x + \sin^2 x$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\bar{N} = \frac{\omega}{2} F^2(\omega)\,\chi''(\omega)} \quad (7.6)$$

... die vom Oszillator ins Wärmebad dissipierte Energie! $\sim \chi''(\omega) = \mathrm{Im}\,\chi(\omega)$