

$$S(k) \approx \frac{1}{c_2} \frac{1}{\xi^{-2} + k^2} \quad (6.70)$$

$$\xi(T) \sim (T - T_c)^{-\nu/2} \quad \text{für } T \rightarrow T_c \quad (6.71)$$

(2) Deutung von ξ :

$$h(r) \stackrel{(6.65)}{=} \frac{1}{S} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} [S(k) - 1]$$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \boxed{h(r) \stackrel{(6.70)}{\approx} \frac{1}{4\pi r c_2} \frac{e^{-r/\xi}}{r} - \left[\frac{1}{S} S(r) \right]} \quad (6.72)$$

... Yukawa-Form der Korrelationen
mit Reichweite ξ !

(3) bei $T = T_c$:

$$\xi \rightarrow \infty \rightarrow \boxed{h(r)|_{T_c} \sim \frac{1}{r} \quad \text{bzw.} \quad S(k)|_{T_c} \sim \frac{1}{k^2}} \quad (6.73)$$

... algebraische Abfall
= weitreichende Korrelationen!

• Messung von $S(k)$:

$$\text{für Streuintensität } I(k) \text{ gilt: } \boxed{\frac{1}{I(k)} \stackrel{(6.48)}{\sim} \frac{1}{S(k)} = c_2 (\xi^{-2} + k^2)} \quad (6.74)$$

bestätigt durch Experiment! Bsp. Argon

- sehr nahe T_c und sehr kleine k .
- Abweichung von (6.74) im Experiment:

Renormierungsgruppen Theorie:

$$\rightarrow \left. \begin{aligned} h(r) \Big|_{T_c} &\sim \frac{1}{r^{1+\eta}} \\ S(k) \Big|_{T_c} &\sim \frac{1}{k^{2-\eta}} \end{aligned} \right\} \text{ mit } \eta = 0.04 \quad (6.75)$$

7. Theorie der linearen Antwort & Fluktuationen - Dissipations-

Theorem

- Lit: 1. David Chandler, Introduction to Modern Stat. Mechanics
- 2. Hans & McDonald
- 3. Original Lit: R. Kubo, J. Phys. Soc. Jap 12, 570 (1957)

Motivation:

Dynamik eines Systems
nahe am thermischen GG
Antwort \sim einwirkende
Kraft
 $x = \chi F$



Eigenschaften des Systems
im thermischen GG
 $\langle x(0)x(t) \rangle$
... Zeitkorrelations-
funktion

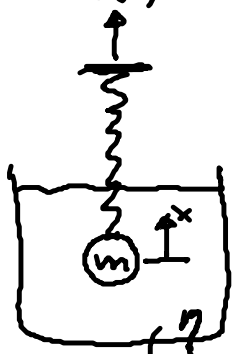


$\langle \dots \rangle$ über viele Realisierungen
von $x(t)$ im thermischen
GG

NB: Ergodenhypothese: τ

$$\langle x(0)x(t) \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} x(t')x(t'+t) dt'$$

7.1 Modellsystem: harmonischer Oszillator



viskose Flüssigkeit
(Wannebad)

Newtonsche Grundgleichung:

$$m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + m \omega_0^2 x = F(t) \quad (7.1)$$

$\alpha = 6\pi\eta a$.. Reibungs Koeffizient
 a .. Radius Kugel

ω_0 ... Eigenfrequenz

- Behandlung im Komplexen: $x \in \mathbb{C}$
- Lösung von (7.1) für harmonische Kraft:

$$\left. \begin{aligned} F(t) &= F(\omega) e^{-i\omega t} \\ \text{Lsg. Ansatz } x(t) &= x(\omega) e^{-i\omega t} \end{aligned} \right\} \rightarrow (7.1)$$

$$\text{mit } \boxed{\frac{\alpha}{m} = 2\gamma}$$

$$\rightarrow m(-\omega^2 - 2\gamma i \omega + \omega_0^2) x(\omega) = F(\omega)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(\omega) &= \chi(\omega) F(\omega) \\ \text{mit } \chi(\omega) &= \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma)} \\ &= \chi'(\omega) + i\chi''(\omega) \end{aligned}} \quad (7.2)$$

... dynamische Suszeptibilität
Antwortfunktion

NB:

$$[F \cdot x] = \text{Energie}$$

• Grenzwerte Fkt:

bel. Kraft: $F(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) e^{-i\omega t}$
 Ausbreitung: $x(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} x(\omega) e^{-i\omega t}$ } Fouriertrafo (FT)

(7.2) Faltungssatz
 der FT

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-t') F(t') dt' \quad (7.3)$$

mit $\chi(\tau) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \chi(\omega) e^{-i\omega\tau}$

... Grenzwerte Fkt. von (7.1)

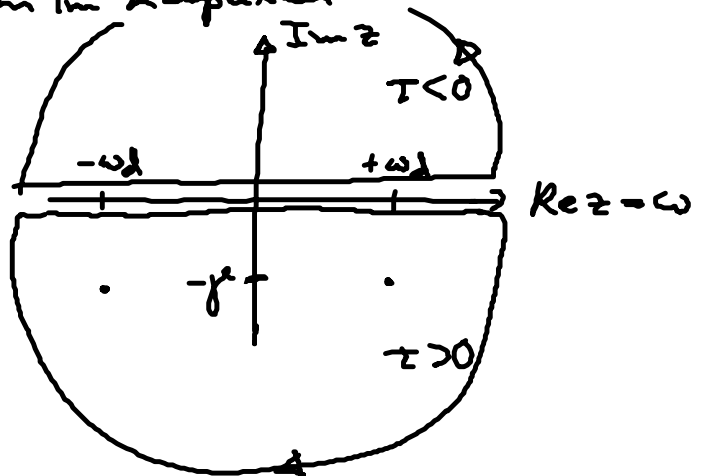
Bem.: (i) $\chi(\tau)$ ist Log. von (7.1) für $F(t') = \delta(t')$

(ii) Kausalität: $\chi(\tau) = 0$ für $\tau < 0$!

• Bestimmung von $\chi(\tau)$: Integration im Komplexen

$$\chi(\omega) = \frac{1}{-m(\omega - \omega_+) (\omega - \omega_-)}$$

mit $\omega_{\pm} = -i\gamma \pm \omega_d$
 $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$



$$\rightarrow \chi(\tau) = \oint \frac{dz}{2\pi} \chi(z) e^{-iz\tau} - \int \dots dz$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

$$= 2\pi i \sum \text{Res} \chi(z) e^{-iz\tau} - \int \dots dz$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

$\rightarrow \tau < 0: 0$

$\tau > 0: \frac{i}{2m\omega_d} e^{-\gamma\tau} \left[e^{-i\omega_d\tau} - e^{i\omega_d\tau} \right]$

$$\rightarrow \chi(\tau) = \Theta(\tau) \frac{1}{m\omega_d} e^{-\gamma\tau} \sin \omega_d \tau \quad (7.5)$$

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

Stepfunkt. $\Theta(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0 \\ 1, & \tau > 0 \end{cases}$

• Energiedissipation: Sei $F(t) = \text{Re}[\underbrace{F(\omega)}_{\in \mathbb{R}} e^{-i\omega t}]$

$$\rightarrow x(t) = \text{Re}[\chi(\omega) F(\omega) e^{-i\omega t}]$$

mittlere verrichtete Leistg von $F(t)$ an Oszillator in Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\bar{N} = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \dot{x}(t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T F(\omega) \cos \omega t \text{Re}[-i\omega \chi(\omega) F(\omega) (\cos \omega t - i \sin \omega t)] dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T F^2(\omega) \cos \omega t [\chi'(\omega) (-\omega) \sin \omega t + \omega \chi''(\omega) \cos \omega t] dt$$

$$= F^2(\omega) \omega \chi''(\omega) \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt}_x$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dx = 1$$

\uparrow
 $\cos^2 x + \sin^2 x$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \bar{N} = \frac{\omega}{2} F^2(\omega) \chi''(\omega) \quad (7.6)$$

... die vom Oszillator ins Wärmebad
dissipierte Energie! $\sim \chi''(\omega) = \text{Im} \chi(\omega)$