3. Grundbegriffe der Dynamik und Newton'sche Axiome

- Frage: Wie entsteht eine Bewegung, was ruft eine bestimmte BK hervor?

→ wollen Gesetze für $\vec{r}(t)$ aufstellen.
wird eine DGL sein (Newton'sche Grundgesetz)

- Aufgabe: Dieses Gesetz für relevante Situationen lösen.

Für eine best. Gruppe von Exp. („klass. Mechanik")
hat Newton ein System v. Axiomen aufgestellt,
das diese Exp. beschreibt und aus der
Beobachtung abgeleitet wird.

3.1 Newton'schen Axiome

1. Trägheitsgesetz

Es gilt ein KS, in denen sich ein kräftefreier MP mit konst. Geschwindigkeit bewegt. Diese KS nennt man Inertialsysteme.

2. Newton'sche Grundgesetz

Die Änderung des Impulses ist gegeben durch die Einwirkung der bewegenden Kraft und geschieht in Richtung der Kraft.

3. actio = reactio

Die Kraft mit der die Umgebung auf einen MP wird, entspricht stets eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft, mit der der MP zurück wirkt.

- Bemerkungen:

(a) Kraft als neuer Begriff eingeführt

$\rightarrow$ aus Alltagserfahrung:

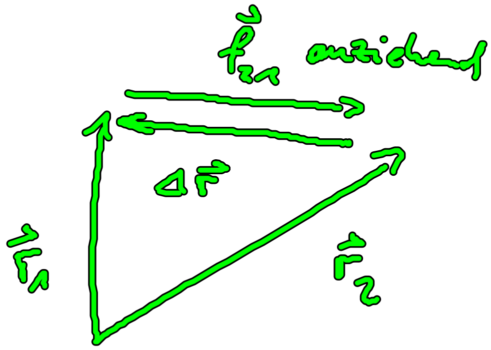
benötige Kraft um Körper zu beschleunigen.

- Newton: Grav. kraft von MP2 auf MP1:

$$\vec{f}_{21} = -G \underbrace{\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}}_{\text{Abstands-quadrat}} \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}}_{\text{EV in Richtung von } \vec{r}_2 \text{ nach } \vec{r}_1}$$

G – Grav. konst.

$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

– Reibungskraft: $\vec{f}_R = -\gamma_n \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot v^n$

γ_n – Reibungskonst

n – aus Exp. festzulegende Potenz

(b) Impuls

Definition: $\vec{p} = m\vec{v}$ — Masse als Prop. faktor

(c) Newton'sche Grundgesetz (2. Axiom)

$$\vec{f} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \xrightarrow{m=\text{const}} \vec{f} = m\vec{a}$$

$$\vec{f} = 0 \longrightarrow m\vec{v} = \text{const}$$

(d) IS ist ein KS in dem die Newton'schen Axiome gelten, kann z.B. anhand der Fixsterne konstruiert werden. Muß man als exp. Tatsache hinnehmen.

Ein KS, das mit der Erde verbunden ist, rotiert in Bezug auf dieses LS und ist damit beschleunigt.

(c) Das NGG ist eine DGL 2. Ordnung für jede Vektorkomponente der BK $\vec{r}(t)$:

$$\vec{f} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\left(m \frac{d}{dt}\vec{r}\right)$$

Bei bekannter Kraft und bekannten AB $(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0)$ kann die vollst. BK berechnet werden.

Im Allgem:

$$\ddot{\vec{r}} + \vec{f}(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t) = 0$$

$$\left(\ddot{x}_i + f_i(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t) = 0\right)$$

$\rightarrow$ 2 konst. Parameter z. B.

Anfangsposition : $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$

Anfangsgeschw. : $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0)$

3.2 Einfache Anwendungen der NGG

(a) kräftefreie Bewegung (mit $m = $ const)

$$\vec{f} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = 0 \quad \Big| \int$$

$$m\vec{v} = \text{const} = \vec{p}_0 \quad \forall t \qquad \text{(Trägheitsgesetz)}$$

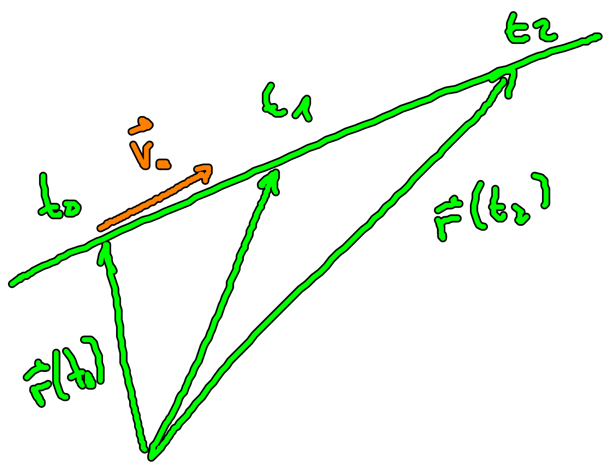
$$m\frac{d}{dt}\vec{r} = \vec{p}_0 \qquad \Big| \int$$

$$m\int_{t_0}^{t} dt' \frac{d}{dt'}\vec{r}(t') = \int_{t_0}^{t} dt' \, \vec{p}_0$$

$$m\,\vec{r}(t)\Big|_{t_0}^{t} = \vec{p}_0\, t \Big|_{t_0}^{t}$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \frac{\vec{p}_0}{m}(t-t_0)$$

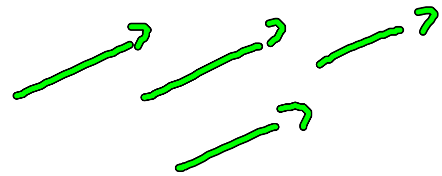
$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t-t_0) \quad \text{geradlinig, gleichförmige Bewegung}}$$



2 Konst. $\vec{r}(t_0)$ u. $\vec{v}(t_0)$

(b) zeitl. und räumlich konst. Kraft

$$\vec{F}_0 = \frac{d}{dt} m\vec{v} \qquad \Big| \int$$



$\vec{F}_0$

$$\int_{t_0}^{t} dt' \, \vec{F}_0 = \int_{t_0}^{t} dt' \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$f_0 (t-t_0) = m\left(\vec v(t) - \vec v(t_0)\right)$$

$$\vec v(t) = \vec v(t_0) + \underbrace{\frac{\vec f_0}{m}}_{a_0} (t-t_0)$$

a_0 konst. Beschleunigung

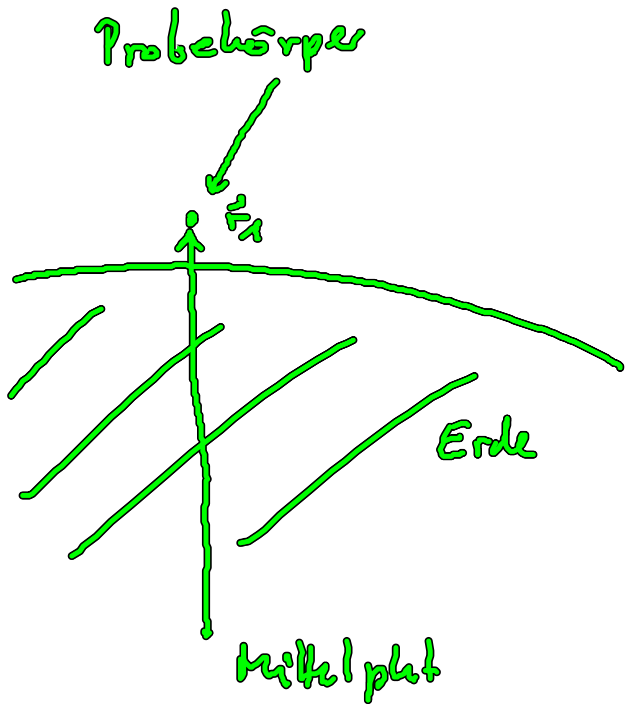
$$\int_{t_0}^{t} dt' \frac{d}{dt'}\vec r(t') = \int_{t_0}^{t} dt' \, \vec v_0 + \vec a_0 (t-t_0)$$

$$\vec r(t) - \vec r(t_0) = \vec v_0 (t-t_0) + \frac{\vec a_0}{2}(t-t_0)^2$$

$$\boxed{\vec r(t) = \vec r_0 + \vec v_0(t-t_0) + \frac{\vec a_0}{2}(t-t_0)^2 \quad \text{gleichm. beschl. Bewegung}}$$

(c) Grav. kraft auf der Erde

Erinnerung: $\vec f_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|^2} \cdot \frac{\vec r_1 - \vec r_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|}$



$$\vec f_{E1} = -G m_1 \sum_n \frac{m_n}{|\vec r_1-\vec r_n|^2}\,\frac{\vec r_1 - \vec r_n}{|\vec r_1-\vec r_n|}$$

Summe über alle MP, die die Erde bilden

Gesamtmasse: $\sum_n m_n = M$

ersetzen Erde durch MP bei $\vec r = 0$

(später starrer Körper)

$$\vec f_{E1} = -G\frac{m_1 M}{|\vec r|^2}\,\frac{\vec r}{|\vec r|} \underset{\uparrow}{=} -\frac{GM}{R^2}\,\vec e_z\, m_1$$

$|\vec{r}|^2 \approx R^2$ (Erdradius) $\underset{\text{oberf.}}{\text{Erd-}}$ $g \approx 9{,}81 \frac{m}{s^2}$

$\Rightarrow$ Grav.kraft in z-Richtung: $f_E^z = -g\,m$

(d) Messung der Masse m

erfolgt bzgl. einer Einheitsmasse m_E
Beide Körper werden mit gleich Kraft beschleunigt:

$\vec{f} = m_E \vec{a}_E$, $\vec{f} = m\,\vec{a}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{m}{m_E} = \frac{|\vec{a}_E|}{|\vec{a}|}}$

gemessen gemessen

(e) träge und schwere Masse

(1) Newton'sche GG (2) Grav. gesetz

$\vec{f} = m_t \vec{a}$ $\vec{f} = m_s(-g\,\hat{e}_z)$

träge Masse schwere Masse

also $m_t \ddot{z} = -m_s g$, alle Exp.: $m_s = m_t \overset{!}{=} m$

$\Rightarrow$ $\ddot{z} = -g$ „alle Körper fallen gleich schnell"

(f) $\vec{f} = \vec{f}(\vec{r}, \vec{v}, t)$

Kraft als Funkt. von Ort, Geschw. und Zeit
ausreichend für klass. Mechanik

3.3 Bilanzen und Erhaltungssätze

- Bilanz einer Größe X:

$$\frac{d}{dt} X = Y \qquad \text{„zeitl. Änderung von } X\text{" } = Y$$

- Erhaltungssatz für X:

$$Y = 0 \Rightarrow X(t) = \text{const} \qquad \text{„}X \text{ ist zeitl. const"}$$

(a) Kinetische Energie, Leistung und Arbeit

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{f} \quad | \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$m\,\underbrace{\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}}\, = \vec{f} \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}\right) = \frac{1}{2}\left(\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}\right) = \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2\right)}_{T} = \underbrace{\dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}}_{N}$$

T – kin. Energie

N – Leistung

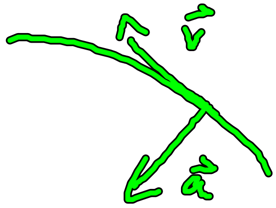
- Bilanz der kin. En. T: $\quad \frac{d}{dt} T = N$

„zeitl. Änderung der kin. Energie T ist geg. durch Leistung N"

- Erhaltungssatz für die kin. En:

$$N = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} T = 0 \rightarrow T = \text{const}$$

- Beispiel: Kreisbewegung $\quad \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f} = 0 = N$



$\dot{\vec r} \perp \ddot{\vec r}$

hier ist kin. Erhalten

- Arbeit: $\quad N = \frac{d}{dt} A$

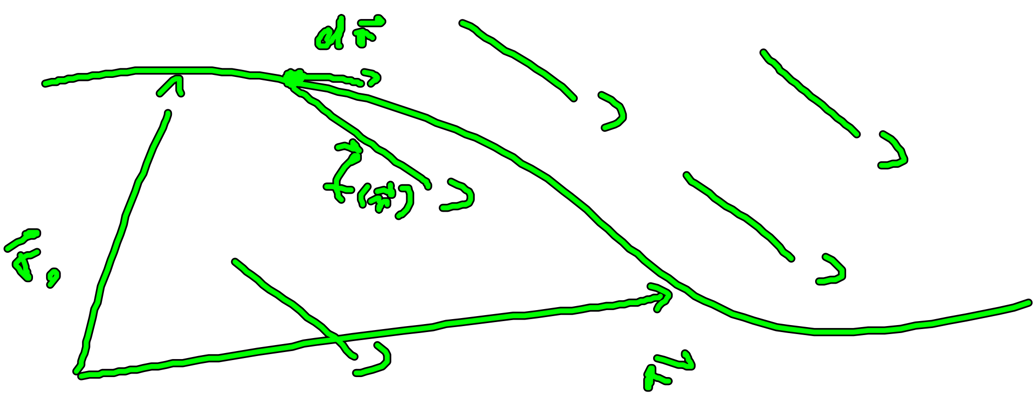
$$A = \int_{t_0}^{t} dt' \, N(t') = \int_{t_0}^{t} dt' \, \dot{\vec r}(t') \cdot \vec f(\vec r(t'))$$

„Arbeit im Zeitintervall $[t_0, t]$"

$$= \int_{t_0}^{t} dt' \, \frac{d\vec r(t')}{dt'} \cdot \vec f(\vec r(t')) = \left| \text{Variablentrafo } t' \to \vec r \quad \frac{d\vec r}{dt'} = \dot{\vec r} \to d\vec r = \dot{\vec r}\, dt \right|$$

$$= \int_{\vec r_0}^{\vec r} d\vec r \cdot \vec f(\vec r) \quad \hat{=} \text{ „Linien-integral"}$$

„Arbeit am MP bei Bewegung von $\vec r_0$ nach $\vec r$"



- Darstellung: $\int d\vec r \ldots$ Wegintegral

- Darstellung: $\int dt \ldots$ Parameterdarstellung d. Linienintegrals

(1) Energiesatz

sehr oft findet man Kräfte mit:

$$-\vec{f}_{kons} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} U(\vec{r}(t))$$

$\vec{f}_{kons}$ – kons. Kraft

U – Potential, bzw. pot. Energie

Aufteilen bel. Kräfte: $\vec{f} = \vec{f}_{kons} + \vec{f}_{diss}$

→ dissipative Kräfte formen i. A. mech. in andere En. formen um

→ Bilanz für kin. Energie:

$$\frac{d}{dt} T = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f} = \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{f}_{kons} + \vec{f}_{diss})$$

$$\overset{(*)}{=} -\frac{d}{dt} U(\vec{r}) + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}_{diss}$$

Bsp. Reibung $\vec{f} = -\gamma \cdot \dot{\vec{r}}$

- Energiebilanz: $\frac{d}{dt}(T+U) = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}_{diss}$

„Die zeitl. Änderung der ges. mechan. Energie ist geg. durch Leistung der diss. Kräfte"

- Energiesatz:

„Für rein konservative Kräfte ($\vec{f}_{diss} = 0$)

ist die mechan. Energie $E = T + U$ konst."

(a) Potential und kons. Kräfte:

$$\frac{d}{dt} U(\vec{r}(t)) = \frac{d}{dt} U(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dx_1} U(\vec{r})\Big|_{x_2, x_3 = \text{const}}}_{\partial_{x_1} U(\vec{r})} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{dU}{dx_2}\Big|_{x_1, x_3 = \text{const}} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{dU}{dx_3}\Big|_{x_1, x_2 = \text{const}} \cdot \dot{x}_3$$

→ andere Schreibweise

$$\vec{f}_{kons} \cdot \dot{\vec{r}} = f_1 \cdot \dot{x}_1 + f_2 \cdot \dot{x}_2 + f_3 \cdot \dot{x}_3$$

$$\overset{!}{=} -\frac{d}{dt} U(\vec{r}) = -\partial_{x_1} U \cdot \dot{x}_1 - \partial_{x_2} U \cdot \dot{x}_2 - \partial_{x_3} U \cdot \dot{x}_3$$

$$\Rightarrow \quad f_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} U(\vec{r})$$

kons. Kraft kann durch part. Ableitung des Potentials bestimmt werden.

$$\vec{f}_{kons} = -\begin{pmatrix} \partial_{x_1} U \\ \partial_{x_2} U \\ \partial_{x_3} U \end{pmatrix} = -\underbrace{\vec{\nabla}}_{} U$$

Gradient (Nabla Op. auf skalares Feld)

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$ vektorieller Diff.operator „Nabla"

$\boxed{\text{Eine Kraft } f \text{ heißt konservativ, wenn sie sich als Gradient eines skalaren Feldes (des Potentials) schreiben läßt.}}$

- wenn $\vec{f}$ kons., so ist $\vec{\nabla} \times \vec{f} = 0$, also

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} f_3 - \partial_{x_3} f_2 \\ \partial_{x_3} f_1 - \partial_{x_1} f_3 \\ \partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \partial_{x_2}(-\partial_{x_3} U) - \partial_{x_3}(-\partial_{x_2} U) \\ \ldots \\ \ldots \end{matrix}$$

$$= 0$$, da die 2.ten Ableitung vertauschen

$\boxed{\text{Eine Kraft } \vec{f} \text{ hat genau dann ein Potential } \vec{f} = -\nabla U(r) \text{, wenn } \operatorname{rot} \vec{f} = \vec{\nabla} \times \vec{f} \text{ verschwindet.}}$

„In einfach wegzusammenhängenden Gebiet"

(d) Impulssatz

Impulsbilanz: $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = f$ NGG

Impulserhalt.: $m\vec{v} = p = \text{const}$ falls $\vec{f} = 0$

Solange keine Kräfte wirken, ist der Impuls eine Konst.

→ Kreis? $\vec{f} \neq 0$ → keine Impulserhalt

(e) Drehimpulssatz

$$\vec{f} = m\ddot{\vec{r}} \quad | \; \vec{r}\times$$

$$\underbrace{\vec{r}\times\vec{f}}_{D} = m \underbrace{\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = \underbrace{\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}}_{=0} + \vec{r}\times\ddot{\vec{r}}$$

Drehmoment: $\vec{D} = \vec{r}\times\vec{f}$

Drehimpuls: $\vec{L} = m\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \vec{r}\times\vec{p}$

- Drehimpulsbilanz: $\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{D}$

  –"– erhalt.: $\vec{D} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L} = 0$

- Kreisbewegung: $\vec{F} = -m\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow D = 0$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega R\sin\omega t \\ -\omega R\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ldots = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\omega R^2 \end{pmatrix}$$ ist zeitl. konst.