

6.2. Bewegung mit Reibungskraft

freie Bewegung + Reibungskraft, 1dimensional

$$AB: v_0 = v(t=0), x_0 = 0$$

a) Stohrreibung

$$\ddot{x} = -\gamma_s \dot{x}, \quad v = \dot{x}$$

$$\dot{v} = -\gamma_s v$$

$$v = v_0 e^{-\gamma_s t}$$

$$\dot{x} = v = v_0 e^{-\gamma_s t}$$

$$x - x_0 = v_0 \int_0^t dt' e^{-\gamma_s t'}$$

$$x = x_0 - \frac{v_0}{\gamma_s} e^{-\gamma_s t} \Big|_0^t$$

$$x = v_0 (1 - e^{-t/\tau_s})$$

Stokesreibung

b) Newtonreibung

$$\dot{v} = -\gamma_N v^2$$

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma_N v^2 \rightarrow \frac{dv}{v^2} = -\gamma_N dt$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv'}{v'^2} = -\gamma_N \int_0^t dt' \rightarrow -\frac{v'^{-1}}{v_0} = -\gamma_N t$$

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \gamma_N t$$

$$v = \frac{v_0}{\gamma_N t v_0 + 1}$$

Newtonreibung

$$\dot{x} = v$$

$$x = \int_0^t dt' \frac{v_0}{\gamma_N t' v_0 + 1} = \frac{1}{\gamma_N} \ln(\gamma_N v_0 t + 1)$$

(a + b)

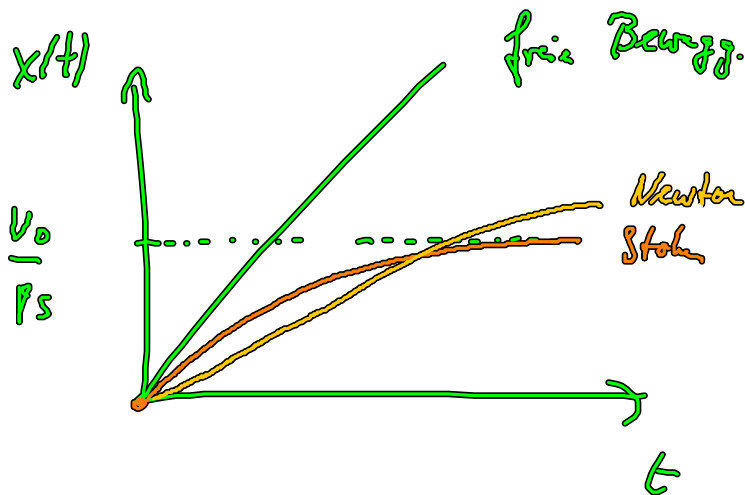
Vergleich d. Ort-Zeit fctrlze:

$$x_{\text{Stoh}}(\infty) \rightarrow \frac{v_0}{\gamma_S}$$

$$x_{\text{Newton}}(\infty) \rightarrow \infty$$

$$v_{\text{Stoh}}(\infty) \rightarrow 0$$

$$v_{\text{Newton}}(\infty) \rightarrow 0$$



Newtonreibung führt nicht zu kompletter Abbremsung,

aber: Achtung, bei Klein festwindigkeiten wird Näherung f. Maxtorreibung verletzt.

7. Oszillator mit Reibungskraft

langsam festwindigkeit, Stohsreibung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\gamma \dot{x}$$

ungestörter
Oszillator

Stohsreibungskraft

linear Dgl., 2. Ordnung, Konstante Koeffiziente

→ $e^{\lambda t}$ Ansatz

7.1. Lösung des Oszillators unter Reibungskraft

mittels Ansatz: $\lambda^2 + \gamma \lambda + \omega_0^2 = 0$

Bestimmungsgleichung f. λ

führt $Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$

hoch' führt entspricht vielen Schwingungen pro Energieverlust / Zeit.

$$\lambda^2 + \frac{\omega_0}{Q} \lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\downarrow \lambda_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \left(\frac{\omega_0^2}{4Q^2} - \omega_0^2 \right)^{1/2}$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 \pm \left(1 - 4Q^2 \right)^{1/2} \right)$$

Welche Lösungstyp sind mathematisch angl.?

hängt v. Q ab

a) im allgemeinen ist $x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$,

(α_1, α_2 ist durch Anfangsbeding. zu finden)

Wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$

(i) $Q < \frac{1}{2} \rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ reell

(ii) $Q > \frac{1}{2} \rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ komplex

b) pathologisch freier Fall $Q = \frac{1}{2} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} = -1$

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 t e^{\lambda t}$$

Anfangsbedingungen zur Bestimmung v. α_1, α_2

a) $x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$

$$x_0 = x(t=0) = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$v_0 = v(t=0) = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2$$

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ v_0 &= \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 \end{aligned} \right\} \text{lineares Gleichungssystem} \\ \text{zur Bestimmung von } \alpha_i$$

$$\begin{pmatrix} x \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

kann nach Cramerscher Regel gelöst werden

$$\alpha_1 = \frac{x_0 \lambda_2 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{x_0}{2} \left(1 + \frac{1 + \frac{2v_0 Q}{\omega_0 x_0}}{(1 - 4Q^2)^{1/2}} \right)$$

\nearrow
 $\lambda_2 - \lambda_1$

λ_1, λ_2 eigenwerte

$$\alpha_2 = \frac{v_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{x_0}{2} \left(1 - \frac{1 + \frac{2v_0 Q}{\omega_0 x_0}}{(1 - 4Q^2)^{1/2}} \right)$$

b) $x(t) = \alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 t e^{\lambda t}$

$$x_0 = \alpha_1$$

$$v_0 = \alpha_1 \lambda + \alpha_2 = x_0 \lambda + \alpha_2$$

$$\lambda = -\frac{\gamma}{2} = -\omega_0$$

$$\alpha_1 = x_0$$

$$\alpha_2 = \left(v_0 + x_0 \frac{\gamma}{2} \right)$$

7.2. physikalische Klassifizierung d. Lösg.

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 \pm (1 - 4Q^2)^{1/2} \right) \quad Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$$

(a, i) Starke Reibung $Q \rightarrow 0$: $Q < \frac{1}{2}$ damped

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(\alpha_1(x_0, v_0) e^{+\frac{\gamma}{2}t(1-4Q^2)^{1/2}} + \alpha_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t(1-4Q^2)^{1/2}} \right)$$

$x(t \rightarrow \infty) = 0 \hat{=}$ long time behavior

kurze Zeitverhalten, Entwicklung nach kleinen t

Taylorreihe bis erster Ordnung in t

$$x(t) = x_0 + v_0 t \quad \text{1. Ordnung in } t$$



gewisse Vielfalt v. Lösungen

(a, i) Schwach Dämpfung $Q \rightarrow \infty, Q > \frac{1}{2}$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2Q} (1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2})$$

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2} t} \left(\cos(\tilde{\omega}_0 t) + \frac{1 + \frac{2\nu_0 Q}{\omega_0 \nu_0}}{2Q (1 - \frac{1}{4Q^2})^{1/2}} \sin(\tilde{\omega}_0 t) \right)$$

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right)^{1/2}$$

- das Oszillatorschwingt auf einer veränderten Frequenz wenn Dämpfungsverluste vorliegen
- es treten gedämpfte Oszillationen auf
- im allgemeinen $x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2} t} \sin(\tilde{\omega}_0 t + \varphi)$

b) kritisch Dämpfend

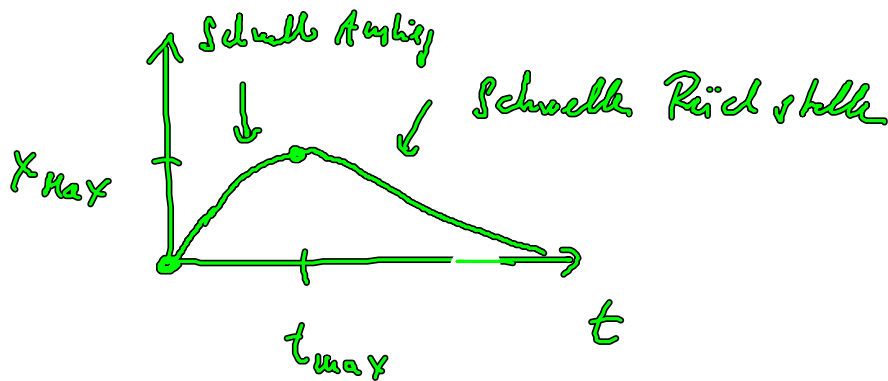
(aperiodisch freier Fall)

$$x(t) = \left[x_0 + t \left(\nu_0 + x_0 \frac{\gamma}{2} \right) \right] e^{-\frac{\gamma}{2} t}$$

i.a. Schwellstungl. Dämpfer in Auslenkung $x(t)$

MaßgröÙ: $x_0 = 0$, $v_0 \neq 0$ für Anfangsgeschwindigkeit
→ Auslenkung Zeiger

$$\rightarrow x(t) = t v_0 e^{-\frac{\gamma}{2} t}$$



$$t_{\max} = \omega_0^{-1} \text{ ist Exakttzeit}$$

$$x_{\max} \approx v_0$$

8. Erzwungene Schwingungen

Schwingg i.a. mit Reibung und extern Kraft

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m} = \tilde{f}(t)$$

inhomog. linea. Dgl. 2. Ordnung.

$$x(t) = \underbrace{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)}_{\text{Lsg. der homogenen Gleichung}} + \underbrace{x_{inh}(t)}_{\text{Lsg. der inhomogenen Gl. (eine spezielle)}}$$

$$x_{inh} \sim e^{\lambda_{inh} t}$$

8.1. Ohne Reibung

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \cos \omega_0 t \\ x_2(t) &= \sin \omega_0 t \end{aligned} \right\} \text{homog. Lsg. bekannt}$$

Method der Variation der Konstanten

$$x_{inh} = \alpha_1(t) x_1(t) + \alpha_2(t) x_2(t)$$

↖
hängt von Zeit ab!

Wende als Ansatz in der inhomogenen Dgl.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}_1 x_1 + \dot{\alpha}_2 x_2 &= 0 \\ \alpha_1 \dot{x}_1 + \alpha_2 \dot{x}_2 &= \hat{f} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Dgl-System} \\ \text{f. } \alpha_i(t) \end{array}$$

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{0 - x_2 \hat{f}}{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1} \quad \text{Cramer's Regel}$$

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{x_1 \hat{f} - 0}{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1}$$

Merke: $x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1 = \omega_0 (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) = \omega_0$

$$\dot{\alpha}_1 = - \frac{\sin(\omega_0 t) \hat{f}(t)}{\omega_0}$$

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{\cos(\omega_0 t) \hat{f}(t)}{\omega_0}$$

hierbei Zeitintegral gelöst

$\hat{f}(t)$ äußere Kraft muß angegeben werden