

mathematischer Einschluss:

Lösung Dgl. 2. Ordnung mit Variation der Konstanten
(spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung)

homogener Lösung sei bekannt: $x_1(t), x_2(t)$

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = c(t)$$

$$\text{Ansatz: } x_{inh}(t) = \alpha_1(t)x_1(t) + \alpha_2(t)x_2(t)$$

Ableitungen berechnen:

$$\dot{x} = \underbrace{\dot{\alpha}_1 x_1 + \dot{\alpha}_2 x_2}_{\text{weil } \alpha_1, \alpha_2 \text{ variabel}} + \alpha_1 \dot{x}_1 + \alpha_2 \dot{x}_2$$

weil α_1, α_2 variabel

aber uns die x_{inh} gesucht haben wir eine Bedingung frei

$$\dot{\alpha}_1 x_1 + \dot{\alpha}_2 x_2 \equiv 0 \quad (\text{Forderung})$$

$$\ddot{x} = \underbrace{\dot{\alpha}_1 \dot{x}_1}_{\text{weil } \alpha_1, \alpha_2 \text{ variabel}} + \underbrace{\dot{\alpha}_2 \dot{x}_2}_{\text{weil } \alpha_1, \alpha_2 \text{ variabel}} + \underbrace{\alpha_1 \ddot{x}_1}_{\text{weil } \alpha_1, \alpha_2 \text{ variabel}} + \underbrace{\alpha_2 \ddot{x}_2}_{\text{weil } \alpha_1, \alpha_2 \text{ variabel}}$$

in die Dgl. einsetzen:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\alpha_1 \ddot{x}_1}_{\text{-----}} + \underbrace{\alpha_2 \ddot{x}_2}_{\text{~~~~~}} + \underbrace{a \alpha_1 \dot{x}_1}_{\text{-----}} + \underbrace{a \alpha_2 \dot{x}_2}_{\text{~~~~~}} \\ & + \underbrace{b \alpha_1 x_1}_{\text{-----}} + \underbrace{c \alpha_2 x_2}_{\text{~~~~~}} + \underbrace{\alpha_1 \dot{x}_1}_{\text{oooooo}} + \underbrace{\alpha_2 \dot{x}_2}_{\text{oooooo}} = C(t) \end{aligned}$$

$$\text{-----} \hat{=} 0, \quad \text{~~~~~} \hat{=} 0$$

wird x_1, x_2 lösg. der homogenen Gleichung

2 Bedingungen:

$$x_1 \dot{\alpha}_1 + x_2 \dot{\alpha}_2 = 0$$

$$x_1 \dot{\alpha}_1 + x_2 \dot{\alpha}_2 = C(t) \quad (\text{oooooo})$$

kann für α_1, α_2 gelöst werden (Cramersche Regel)

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{-x_2 C(t)}{x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2}, \quad \dot{\alpha}_2 = \frac{x_1 C(t)}{x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2}$$

wenn α_1, α_2 bestimmt, so ist

$$x_{inh} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

8.1. ohne Reibung

$\tilde{f}(t) \hat{=} c(t)$ treibende Kraft $\frac{f}{m} = \tilde{f}$

$$x_1(t) = \cos(\omega_0 t) \quad \dot{x}_1(t) = -\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$x_2(t) = \sin(\omega_0 t) \quad \dot{x}_2(t) = \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_2 \dot{x}_1 = \omega_0 (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) = \omega_0$$

$$\downarrow \dot{\alpha}_1(t) = - \frac{\sin(\omega_0 t) \tilde{f}(t)}{\omega_0}$$

$$\dot{\alpha}_2(t) = \frac{\cos(\omega_0 t) \tilde{f}(t)}{\omega_0}$$

einfachste Bsp: $\tilde{f}(t) = \tilde{f}_0 \cos(\omega t)$

~

$$\alpha_1(t) = \frac{\tilde{f}_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\cos(\omega_0 t) \cos(\omega t) + \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \sin(\omega t) \right)$$

$$\alpha_2(t) = \frac{\tilde{f}_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\sin(\omega_0 t) \cos(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) \sin(\omega t) \right)$$

aus Tabelle (Broustein)

$$\Downarrow x_{inh}(t) = \alpha_1(t) \cos(\omega_0 t) + \alpha_2(t) \sin(\omega_0 t)$$

$$= \frac{\tilde{f}_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \quad \text{Speziell lös der inhomog. gleichg.}$$

gesucht Lösung:

$$x(t) = \alpha_1 \cos(\omega_0 t) + \alpha_2 \sin(\omega_0 t) + x_{inh.}$$

Konstante der homogenen Lösung

festlegen über AB

$$x_0 = x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 = \dot{x}_0$$

$$x_0 = \alpha_1 + \tilde{f}_0 / (\omega_0^2 - \omega^2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\dot{x}_0 = \alpha_2 \omega_0 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 = -\frac{\tilde{f}_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Lösung der Schwingungsgleichg. mit externer Kraft $\tilde{f} = \tilde{f}_0 \cos(\omega t)$

$$x(t) = \frac{\tilde{f}_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t))$$

Diskussion

a) Überlagerung v. 2 Tingenzen: ω, ω_0

b) $\omega \rightarrow \omega_0$ „Resonanzkatastrophe“

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} x(t) = \tilde{f}_0 \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{0}{0}$$

$$\omega = \omega_0 + \Delta \omega$$

$$\downarrow$$

$$0$$

$$= \tilde{f}_0 \frac{\cos(\omega_0 + \Delta \omega)t - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2 - (\omega_0 + \Delta \omega)^2}$$

Taylor

$$= \int_0^{\tilde{t}} \frac{\cos(\omega_0 t) - \Delta \omega t \sin \omega_0 t - \frac{1}{2} \Delta \omega^2 t^2 \cos \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega_0^2 - 2\omega_0 \Delta \omega - \Delta \omega^2} dt$$

$$x(t) = \int_0^{\tilde{t}} \left(\frac{\sin \omega_0 t}{2\omega_0} \right) dt$$

Schwingung wird auf gebaut, wächst linear in t.

Beispiel: Selbstsynchronisation
v. Oszillatoren (Brücke)

c) $\omega_0 \rightarrow 0$, $x(t) = \frac{\tilde{t}}{2} t^2$

8.2. mit Reibung

findung Schwinges mit Reibung. nach Rezept f. α_1, α_2 :

homogener Lsg. $x_{1/2} = e^{\lambda_{1/2} t}$, $\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2} \right)^{1/2}$

$$\dot{\alpha}_1(t) = - \frac{x_2(t) \tilde{f}(t)}{x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2} = - \frac{e^{\lambda_2 t} \tilde{f}(t)}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

$$x_1 \cdot \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2 = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

$$\downarrow \dot{\alpha}_1(t) = - \frac{\tilde{f}(t) e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$\text{analog: } \dot{\alpha}_2(t) = \frac{e^{-\lambda_2 t} \tilde{f}(t)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Integral über $\alpha_{1,2}(t)$ berechnen, x_{inh} angeben als

$$x_{\text{inh}} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \quad \text{für } \tilde{f}(t) = \tilde{f}_0 \cos(\omega t)$$

$$x_{\text{inh}} = \tilde{f}_0 \frac{\cos(\omega t + \varphi)}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \rho^2)^{1/2}} \quad \text{Spezielle Lsg. d. inhomogenen Dgl.}$$

↑
Dämpfung

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\omega \rho}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

gesamte Lösung: $x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + \underline{\underline{x_{inh}(t)}}$

$$t \rightarrow \infty, \quad e^{\lambda_{1,2} t} \rightarrow 0 \\ \left(e^{-\frac{r}{2} t} \right)$$

Die homogenen Lsg. sind gedämpft und verschwinden für große Zeiten, damit wird $x = \underline{\underline{x_{inh}(t)}}$ für lange Zeiten. Vorher findet der Einschwingvorgang statt.

Diskussion der Lösungen

a) Die Frequenz der Schwingg. f. lange Zeiten $\hat{=}$ der eingepprägten Frequenz ω mit einer Phasenverschiebung φ .

b) Diskussion der Amplitude:

$$A(\omega) = \frac{\tilde{f}_0}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2 \right)^{1/2}}$$

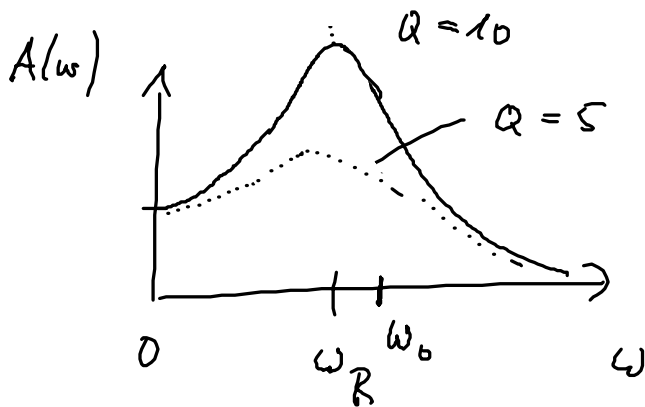
• $\omega \rightarrow 0$: $A(\omega) \rightarrow \frac{\tilde{f}_0}{\omega_0^2}$

• Extrema : $\partial_{\omega} A(\omega) = 0$ setzen $\rightarrow \omega = \underline{\underline{\omega_R}}$

$$\rightarrow \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

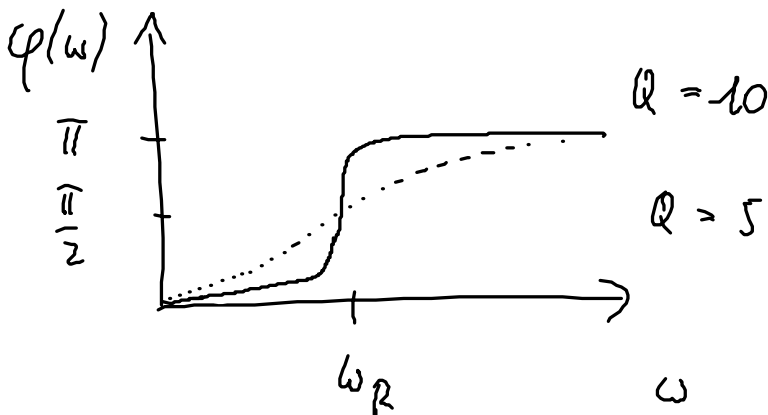
$A(\omega)$ hat Maximum an Stelle ω_R

• $\omega \rightarrow \infty : A(\omega) \rightarrow 0$



- Die stärkste Auslenkung findet man bei einer Frequenz $\omega_R < \omega_0$
- verschiedene Faktoren Q

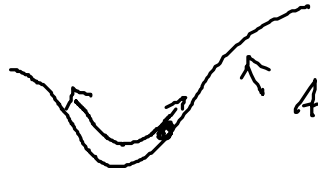
$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0^2}}$$



Maximum der Amplitude wird im Vergleich zur Kraft um $\frac{\pi}{2}$ verschoben gefunden.

9. Nichtlineare Schwingungen

Schwinger



Abweichung von x^2 Potential
zu Beispiel Term $x^3, x^4 \dots$

die allgemeine Ansatz ist $f \approx -k_1 x + k_2 x^2 + \dots$

→ kompliziert + unerwartete Lösungen

9.1. Störungstheorie

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \epsilon g(x)$$

klein ϵ

Kraft die nichtlinear von x
abhängt

Wissen: Lösung d. linearen Problems bekannt

Idee: erwidere die Lösung d. nichtlinearen Problems
um die Lösung d. linearen Problems

Ansatz: $x = x_L(t) + \epsilon \delta x$

lineare Problem

kleine Störung

einsetzen in nichtlineares Dgl.:

$$\underbrace{\ddot{x}_e + \varepsilon \ddot{\delta x}} = \underbrace{-\omega_0^2 x_e - \omega_0^2 \varepsilon \delta x + \varepsilon g(x_e + \varepsilon \delta x)}$$

= 0 ist ja Lösung des linearen Pfl.

$$\varepsilon \ddot{\delta x} = -\omega_0^2 \varepsilon \delta x + \varepsilon g(x_e + \varepsilon \delta x)$$

analy zu Taylor: nur 1. Ordng in ε ansehen:

$$\rightarrow \ddot{\delta x} + \omega_0^2 \delta x = g(x_e)$$

δx erfüllt Oszillatorgleichung mit treibend Kraft $g(x_e)$

$$\text{wenn } g(x_e) = k_2 x_e^2$$

$$x_e = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\ddot{\delta x} + \omega_0^2 \delta x = k_2 x_e^2 = k_2 x_0^2 \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega_0 t))$$

↑
bekannte Lösung
des linearen Problems

↓
konstant
in t
verschiebt
um $\frac{\pi}{2}$

↓
treibt die
Oszillatoren
um
doppelt
 $\frac{\pi}{2}$

spezielle Lsg ohne Pampfung

$$\delta x \sim \cos(2\omega_0 t)$$

wenn Lsg:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + x_2 \cos(2\omega_0 t)$$

Nichtlineare Schwingungen sind durch höhere harmonische Schwingg. gekennzeichnet, stark abhängig von Potential.

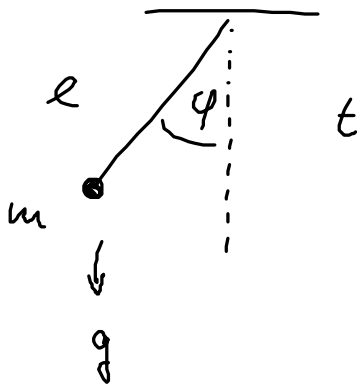
Bsp: Erzeugg. der zweiten harmonischen Frequenz in nichtlinearen Optik.

9.2. Pendel \rightarrow Tetorium

9.3. Buckingham Theorem : Einsichten ohne Rechnen

F. Buckingham 1867-1940

Pendel :



- Größen mit denen man das physikalische Problem beschreiben kann

- Einheiten : $[m]$, $[t]$, $[l]$
Fundmente!

Theorem :

a) Problem ansehen und lege die physikal. Größen fest + Fundmente

b) wenn n Variable (physik. Größen) hat und r Fundmente, so gibt es $n-r$

dimensionallos Parameter Π_i

c) dann kann man die Lösung d. Problems
als Funktion $g(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{u-r}) = 0$
schreiben.

Beispiel: $u = 5$, $r = 3$, \rightarrow 2 Parameter

φ ist bereits dimensionlos, $\Pi_1 = \varphi$

$\Pi_2 = ?$ $\Pi_2 = m^\alpha l^\beta g^\gamma t^\delta = \text{dimensionlos}$

$\alpha = 0$ $\beta = -\gamma$ $\delta = 2$ wählen
kann man $\delta = 2\gamma$
nicht kompensieren

$$m^0 [l]^\beta [l t^{-2}]^\gamma [t]^\delta$$

$$\Pi_2 = \frac{t^2 g}{l}$$

Lösung, wie Variable verbunden sind:

$$g\left(\varphi, \frac{t^2 g}{l}\right) = 0$$

umstellend nach \tilde{t}_2 : $\frac{t^2}{l} = f(\varphi)$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g} f(\varphi)}$$

↑

Die Schwingsdauer des Pendels ist,

proportional zu $\sqrt{\frac{l}{g}}$, und hängt in

allgemeiner Weise von φ ab (Maximalauslenkung).