mathematischer Einschub:

Lösung Dgl. 2. Ordnung mit Variation der Konstanten

(spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung)

homogene Lösg. sei bekannt: $x_1(t), x_2(t)$

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = c(t)$$

Ansatz: $x_{inh}(t) = \alpha_1(t)\, x_1(t) + \alpha_2\, x_2(t)$

Ableitungen berechnen:

$$\dot{x} = \underbrace{\dot{\alpha}_1 x_1 + \dot{\alpha}_2 x_2} + \alpha_1 \dot{x}_1 + \alpha_2 \dot{x}_2$$

weil α_1, α_2 variabel

aber uns ein $x_{inh.}$ gesucht haben wir eine Bedingung frei:

$$\dot{\alpha}_1 x_1 + \dot{\alpha}_2 x_2 \equiv 0 \quad \text{(Forderung)}$$

$$\ddot{x} = \dot{\alpha}_1 \dot{x}_1 + \dot{\alpha}_2 \dot{x}_2 + \underline{\alpha_1 \ddot{x}_1} + \underline{\alpha_2 \ddot{x}_2}$$

in die Dgl. einsetzen:

$$\alpha_1 \ddot{x}_1 + \alpha_2 \ddot{x}_2 + a \alpha_1 \dot{x}_1 + a \alpha_2 \dot{x}_2$$

$$+ b \alpha_1 x_1 + c \alpha_2 x_2 + \dot{\alpha}_1 \dot{x}_1 + \dot{\alpha}_2 \dot{x}_2 = c(t)$$

$$\text{----} \;\hat{=}\; 0 \quad , \quad \sim\sim \;\hat{=}\; 0$$

weil x_1 x_2 Lösg. der homogenen Gleichung

2 Bedingungen:

$$x_1 \dot{\alpha}_1 + x_2 \dot{\alpha}_2 = 0$$

$$\dot{x}_1 \dot{\alpha}_1 + \dot{x}_2 \dot{\alpha}_2 = c(t) \quad (\circ\circ\circ\circ\circ)$$

kann für α_1, α_2 gelöst werden (Cramersche Regel)

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{-x_2\, c(t)}{x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2} \quad , \quad \dot{\alpha}_2 = \frac{x_1\, c(t)}{x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2}$$

wenn α_1, α_2 bestimmt, so ist

$$x_{inh} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

8.1. ohne Reibung

$\tilde{f}(t) \hat{=} c(t)$ treibende Kraft $\frac{f}{m} = \hat{f}$

$$x_1(t) = \cos(\omega_0 t) \qquad \dot{x}_1(t) = -\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$x_2(t) = \sin(\omega_0 t) \rightarrow \qquad \dot{x}_2(t) = \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2 = \omega_0 (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) = \omega_0$$

$$\Rightarrow \dot{\alpha}_1(t) = -\frac{\sin(\omega_0 t)\, \tilde{f}(t)}{\omega_0}$$

$$\dot{\alpha}_2(t) = \frac{\cos(\omega_0 t)\, \tilde{f}(t)}{\omega_0}$$

einfaches Bsp: $\tilde{f}(t) = \tilde{f}_0 \cos(\omega t)$

$\sim$

$$\alpha_1(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\cos(\omega_0 t)\cos(\omega t) + \frac{\omega}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\sin(\omega t)\right)$$

$$\alpha_2(t) = \frac{\tilde{f}_0}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\sin(\omega_0 t)\cos(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0}\cos(\omega_0 t)\sin(\omega t)\right)$$

aus Tabelle (Bronstein)

$$\Rightarrow x_{inh}(t) = \alpha_1(t)\cos(\omega_0 t) + \alpha_2(t)\sin(\omega_0 t)$$

$$= \frac{\tilde{f}_0}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega t)$$ spezielle Lsg der inhomog. Gleichg.

<u>gesamte Lsg.</u>:

$$x(t) = \alpha_1\cos(\omega_0 t) + \alpha_2\sin(\omega_0 t) + x_{inh}$$

Konstanten der homogen Lsg.
festlegen über AB

$$x_0 = x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 = \dot{x}_0$$

$$x_0 = \alpha_1 + \tilde{f}_0/(\omega_0^2-\omega^2) \overset{!}{=} 0$$

$$\dot{x}_0 = \alpha_2 \omega_0 \overset{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \alpha_2 = 0 \quad , \quad \alpha_1 = -\frac{\tilde{f}_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Lösung der Schwingungsgleichg. mit externer Kraft $\tilde{f} = \hat{f}_0 \cos(\omega t)$

$$x(t) = \frac{\tilde{f}_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t) \right)$$

<u>Diskussion</u>:

a) Überlagerung v. 2 Frequenzen: ω, ω_0

b) $\omega \to \omega_0$ „Resonanzkatastrophe"

$$\lim_{\omega \to \omega_0} x(t) = \tilde{f}_0 \lim_{\omega \to \omega_0} \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2} \hat{=} \frac{0}{0}$$

$\omega = \omega_0 + \Delta\omega$
$\downarrow$
0

$$= \tilde{f}_0 \frac{\cos(\omega_0 + \Delta\omega)t - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2 - (\omega_0 + \Delta\omega)^2}$$

Taylor $= \tilde{f}_0 \dfrac{\cos(\omega_0 t) - \cancel{\Delta\omega t} \sin\omega_0 t - \cancel{\cos\omega_0 t}}{\cancel{\omega_0^2} - \cancel{\omega_0^2} - 2\omega_0 \cancel{\Delta\omega} - \cancel{\Delta\omega^2}}$

$$x(t) = \tilde{f}_0 \left(\frac{\sin \omega_0 t}{2\omega_0} \right) t$$

Schwingung wird aufgebaut, wächst linear in t.

Beispiel: Selbstsynchronisation
v. Oszillatoren (Brücke)

c) $\omega_0 \to 0$, $x(t) = \frac{\tilde{f}}{2} t^2$

8.2. mit Reibung

Gleichung Schwinger mit Reibung. nach Rezept f. α_1, α_2:

homogene Lsg. $x_{1/2} = e^{\lambda_{1/2} t}$, $\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2}\left(1 \pm (1-4Q^2)^{1/2}\right)$

$$\dot{\alpha}_1(t) = -\frac{x_2(t)\,\tilde{f}(t)}{x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2} = -\frac{e^{\lambda_2 t}\,\tilde{f}(t)}{\lambda_2 - \lambda_2}\, e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

$$x_1 \cdot \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)\, e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

$$\Rightarrow \dot{\alpha}_1(t) = -\frac{\tilde{f}(t)\, e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

analog: $$\dot{\alpha}_2(t) = \frac{e^{-\lambda_2 t}\,\tilde{f}(t)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Integral über $\alpha_{1/2}(t)$ berechnen, x_{inh} angeben als

$$x_{inh} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \quad \text{für} \quad \tilde{f}(t) = \tilde{f}_0 \cos(\omega t)$$

$$x_{inh} = \tilde{f}_0 \frac{\cos(\omega t + \varphi)}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \rho^2\right)^{1/2}}$$

spezielle Lsg. der inhomogen Dgl.

Dämpfung

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega \rho}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Gesamte Lösung: $x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + \underline{\underline{x_{inh}(t)}}$

$t \to \infty$, $e^{\lambda_{1/2} t} \to 0$

$(e^{-\frac{\gamma}{2} t})$

Die homog. Lsg. sind gedämpft und verschwinden für große Zeiten, damit wird $x = \underline{\underline{x_{inh}(t)}}$ für lange Zeiten. Vorher findet der Einschwingvorgang statt.

Diskussion der Lösungen

a) Die Frequenz der Schwingung f. lange Zeiten $\hat{=}$ der eingeprägten Frequenz ω mit einer Phasenverschiebung φ.

b) Diskussion der Amplitude:

$$A(\omega) = \frac{\hat{f}_0}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2\right)^{1/2}}$$

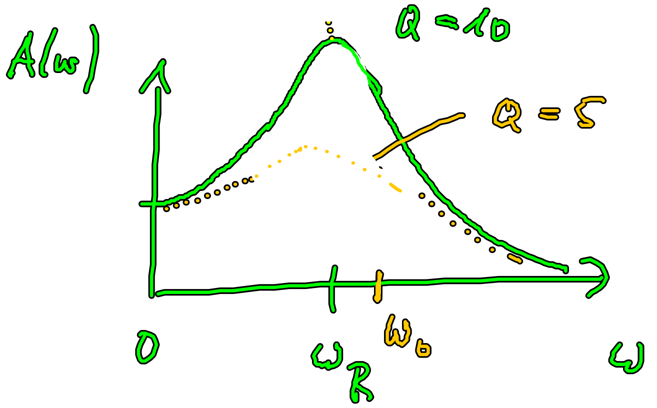
- $\omega \to 0$: $A(\omega) \to \dfrac{\hat{f}_0}{\omega_0^2}$

- Extrema : $\partial_\omega A(\omega) = 0$ setzen $\to$ $\omega = \underline{\underline{\omega_R}}$

$$\rightarrow \quad \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

$A(\omega)$ hat Maximum an Stelle ω_R

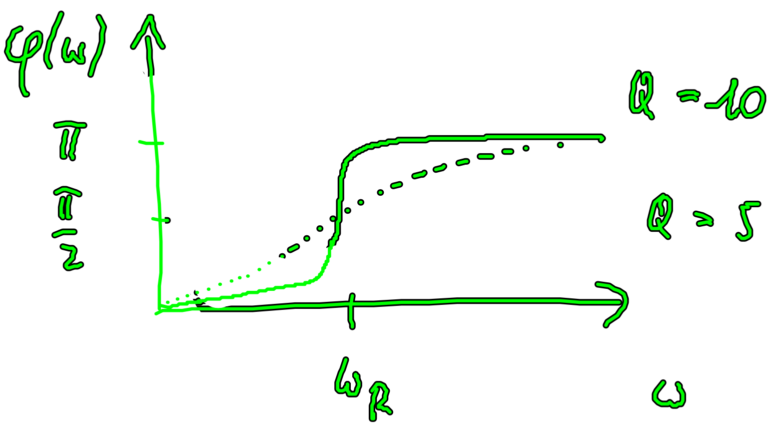
- $\omega \to \infty$: $A(\omega) \to 0$



– Die stärkste Anregung findet man bei einer Frequenz $\omega_R < \omega_0$

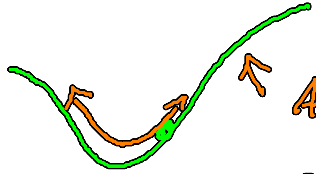
– verschiedene Güten Q

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0^2}}$$



Maximum der Amplitude wird im Vergleich zur Kraft um $\frac{\pi}{2}$ verschoben gefunden.

9. Nichtlineare Schwingungen

Schwinger  Abweichungen vom x^2 Potential

zum Beispiel Term x^3, x^4 ...

ein allgemeiner Ansatz ist $f \simeq -kx + k_2 x^2 + \dots$

→ kompliziert + unerwartete Lösungen

9.1. Störungstheorie

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \varepsilon\, g(x)$$

ε: kleine Größe

$g(x)$: Kraft die nichtlinear von x abhängt

wissen: Lösung d. linearen Problems bekannt

Idee: entwickle die Lösung d. nichtlinearen Problems um die Lösung d. linearen Problems

Ansatz: $x = x_e(t) + \varepsilon\, \delta x$

$x_e(t)$: linear Problem

$\varepsilon\, \delta x$: kleine Störung

einsetzen in nichtlineare Dgl.:

$$\ddot{x}_e + \varepsilon \ddot{\delta x} = -\omega_0^2 x_e - \omega_0^2 \varepsilon \delta x + \varepsilon g(x_e + \varepsilon \delta x)$$

$\ddot{x}_e$, $-\omega_0^2 x_e$: $= 0$ ist ja Lösung der linearen Dgl.

$$\varepsilon \ddot{\delta x} = -\omega_0^2 \varepsilon \delta x + \varepsilon g(x_e + \varepsilon \cancel{\delta x})$$

analog zu Taylor: nur 1. Ordnung in ε ansehen:

$$\longrightarrow \quad \ddot{\delta x} + \omega_0^2 \delta x = g(x_e)$$

δx erfüllt Oszillatorgleichung mit treibender Kraft $g(x_e)$

wenn $g(x_e) = k_2 x_e^2$

$$x_e = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\ddot{\delta x} + \omega_0^2 \delta x = k_2 x_e^2 = k_2 x_0^2 \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\omega_0 t)\right)$$

bekannte Lösung des linearen Problems

konstant i.A. verschiebt nur Ruhepkt.

treibt den Oszillator mit doppelter Frequenz

<u>spezielle Lsg ohne Dämpfg.</u>

$$\delta x \sim \cos(2\omega_0 t)$$

<u>neue Lsg:</u> $\quad x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + x_2 \cos(2\omega_0 t)$

Nichtlineare Schwingungen sind durch höhere Harmonische Schwingg. gekennzeichnet, stark abhängig vom Potential.

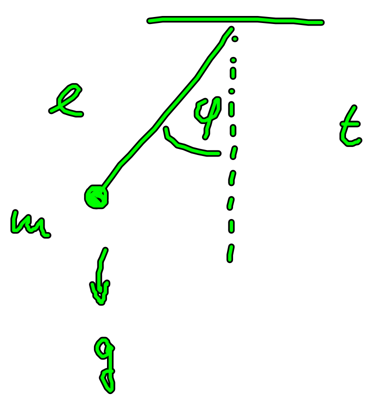
Bsp: Erzeugg. der Zweiten Harmonischen Frequenz in nichtlinearer Optik.

9.2. Pendel → Tutorium

9.3. Buckingham Theorem: Einsichten ohne Rechnen

E. Buckingham 1867–1940

Pendel:



- Größen mit denen man das physikalische Problem beschreiben kann
- Einheit: [m], [t], [l]
  Grundeinheiten!

Theorem: a) Problem ansehen und lege die physikal. Größen fest + Grundeinheiten

b) wenn n Variable (physikal. Größen) hat und r Grundeinheiten, so gibt es $n-r$

dimensionslose Parameter Π_i:

c) dann kann man die Lösung d. Problems als Funktion $g(\Pi_1, \Pi_2 \dots \Pi_{n-r}) = 0$ schreiben.

Pendel: $n = 5$, $r = 3$, $\rightarrow$ 2 Parameter

φ ist bereits dimensionslos, $\Pi_1 = \varphi$

$\Pi_2 = ?$ $\quad \Pi_2 = m^\alpha l^\beta g^\gamma t^\delta$ = dimensionslos

$\alpha = 0$ kann man nicht kompensieren

$\beta = -\gamma$

$\delta = 2\gamma$

$\delta = 2$ wählen

$$m^0 [l]^\beta [l t^{-2}]^\gamma [t]^\delta$$

$$\Pi_2 = \frac{t^2 g}{l}$$

Lösung, wie Variablen verbunden sind:

$$g\left(\varphi, \frac{t^2 g}{l}\right) = 0$$

umstellen nach Π_2: $\frac{t^2 g}{\ell} = f(\varphi)$

$$t = \sqrt{\frac{\ell}{g} f(\varphi)}$$

Die Schwingungsdauer des Pendels ist proportional zu $\sqrt{\frac{\ell}{g}}$, und hängt im allgemeinen Teile von φ ab (Maximalauslenkung).