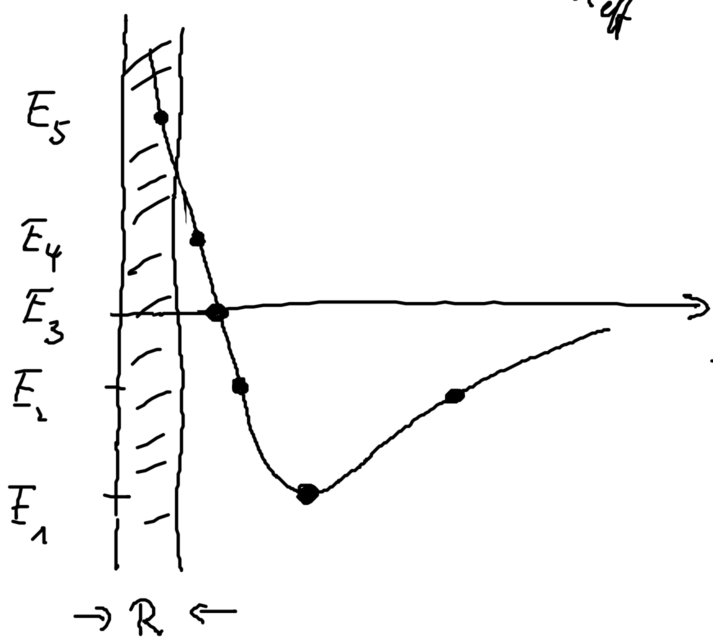
diskutieren effektives Potential $U_{eff}(r)$ für Massepunkt m ($\mu \to m$) im Gravitationsfeld des Massepunkts M

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L_z^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r}}_{U_{eff}}$$



R: Radius d. Zentralkörpers endlich angenommen, auch wenn Begründung noch fehlt, daß Massepunkttheorie verwendet werden kann.

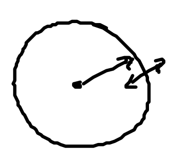
sehen uns Umkehrpunkte der Bahn an:

sind Punkte bei der sich Abstand r vom Koordinatenursprung nicht ändert.

$$\dot{r} = 0 \to U_{eff} = E$$

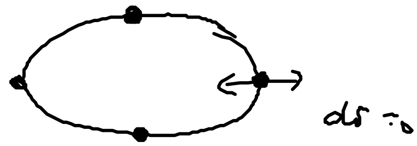
Wie viel Umkehrpunkte $\dot{r} = 0$ sind möglich?

$E_1 < 0$ 1 Umkehrpunkt
→ Kreisbahn



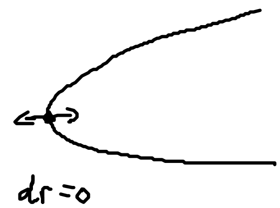
$E_2 < 0$ 2 Umkehrpunkte

→ Ellipse



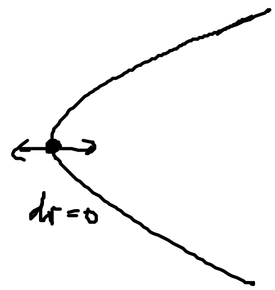
$E_3 = 0$ 1 Umkehrpunkt

→ Parabel



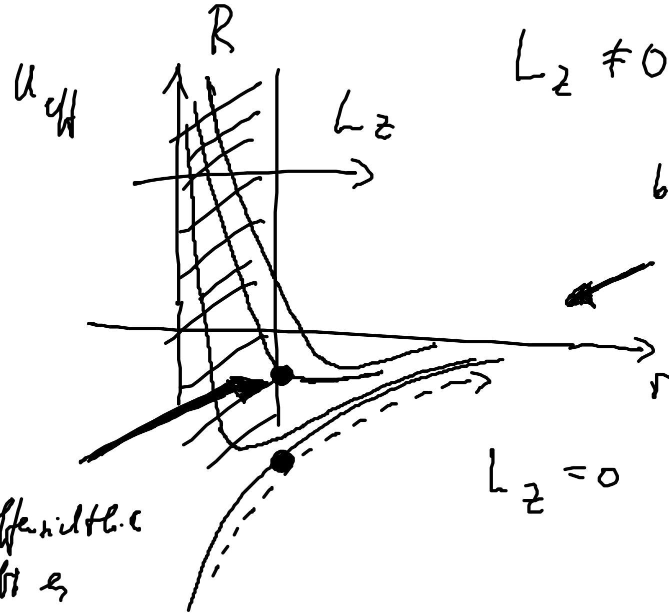
$E_4 > 0$ 1 Umkehrpunkt

→ Hyperbel



$E_5 > 0$ Kollision mit Zentralkörper

Kosmische Geschwindigkeiten



b) Unter welchen Bedingungen kann Objekt die Erde (Zentralkörper) verlassen

a) Offensichtlich gibt es einen minimalen Drehimpuls L_z der

Sturz in Erde verhindert → Welche Geschwindigkeit ist dazu nötig?

zu a) Minimum festlegen: $\frac{\partial U_{eff}}{\partial r} \overset{!}{=} 0$

mindest Höhe der Umlaufbahn

$$-2\frac{L_z^2}{2mr^3} + \frac{GmM}{r^2} \overset{!}{=} 0 \Big|_{r = R_{Erde}}$$

L_z ist unbekannt!

$$L_z = m R_E^2 \dot{\varphi} \;, \quad \dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi R_E / v} = \frac{v}{R_E}$$

Umlaufzeit

Geschwindigkeit des Satelliten

→ einsetzen und umstellen nach v

$$R_E v^2 = GM \qquad g = \frac{GM}{R_E^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_E}} = \sqrt{g R_E} \approx 8 \frac{km}{s}.$$

für Parameter der Erde benötigt man mindestens $8 \frac{km}{s}$ um eine stabile Umlaufbahn zu erreichen.

zu b) welches v braucht ein Körper beim Start v. Erdoberfläche um dem Feld der Erde zu entkommen

Parabelbahn: $E = 0$, bleibt im ∞ liegen

$$E = 0 = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \cancel{\frac{L_z^2}{2mr^2}} - G\frac{mM}{r}$$

senkrechter Start $\underline{L_z = 0}$, Start bei $r = R_E$

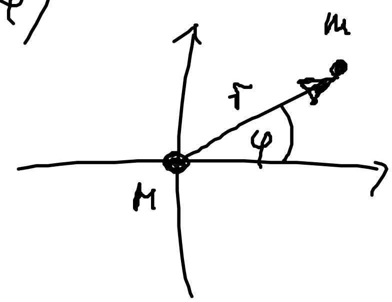
$\dot{r} = v \rightarrow$ umstellen nach v

$$v^2 = 2GM/R_E$$

$$v = \sqrt{2gR_E} \approx 11 \frac{km}{s}$$

eigentliche Ziel ist es, die Bahnform zu bestimmen

suche $r = r(\varphi)$



Bahnkurve über Parameter-darstellung durch φ.

Energiesatz: $$E = \underbrace{\frac{m}{2}\dot{r}^2}_{\text{kinet. Energie}} + \underbrace{\frac{L_z^2}{2mr^2}}_{\text{Drehimpuls}} - \underbrace{U(r)}_{\text{Gravitation}}$$

nichtlineare Dgl. für $r(t)$

- eine Dgl. ist Trennung der Variablen

- zweite Dgl. durch Substitution $s = \frac{1}{r}$:

$$U(r) = -\frac{GmM}{r} \longrightarrow -GmM\,s \equiv V(s)$$

$$\frac{L_z^2}{2mr^2} \longrightarrow \frac{L_z^2}{2m} s^2$$

$$\dot{r} \longrightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} = -s^{-2}\dot{s} \qquad s = s(t)$$

alles einsetzen in E-Satz:

$$\frac{m}{2}\frac{\dot{s}^2}{s^4} + \frac{L_z^2}{2m} s^2 + V(s) = E$$

jetzt bestimmen wir $s(\varphi)$

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = s' \, \frac{L_z s^2}{m}$$

Ableitg. nach φ

oben einsetzen

$$\frac{L_z^2}{2m}\left(s'^2 + s^2\right) + V(s) = E$$

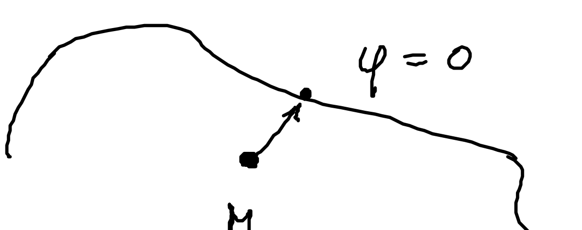
nach φ ableiten:

$$s'' + s = G\,\frac{m^2 M}{L_z^3}$$

welch Wunder, eine Schwingungsgleichung!

$$s(\varphi) = \underbrace{A\sin\varphi + B\cos\varphi}_{\text{homog. Lsg. mit 2 Konstanten}} + \underbrace{G m^2 M / L_z^3}_{\text{spezielle Lsg. der inhomogenen Gleichg.}}$$

Konstanten bestimmen:



$\varphi = 0$ $\hat{=}$ geringster Abstand zum Ursprung

wissen: $s = \frac{1}{r}$

$\longrightarrow$ s muß maximal sein

$$S'\Big|_{\varphi=0} \overset{!}{=} 0 \quad (\text{Extremum}) \quad \rightarrow \quad A = 0$$

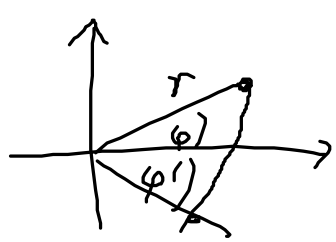
$$S''\Big|_{\varphi=0} < 0 \quad (\text{maximal!}) \quad \rightarrow \quad B > 0$$

$$\rightarrow \quad r(\varphi) = \frac{K}{(1 + \varepsilon \cos\varphi)}$$

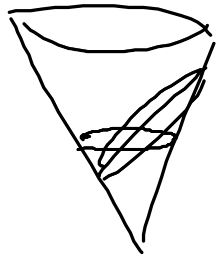
K, ε sind Konstanten

$$K = \frac{L_z^3}{G m^2 M}, \qquad \varepsilon = BK$$

Damit ist eine Parameterdarstellung der Bahnkurve gefunden:



Diese mathematische Form beschreibt Kegelschnitte, bzw.



die entstehenden Kurven dabei:

$\varepsilon < 1$ Ellipse

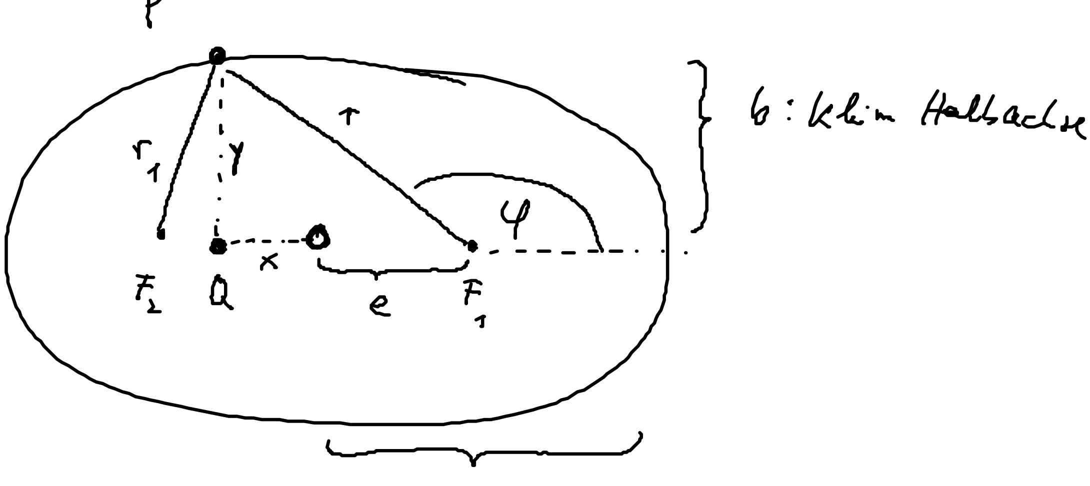
$\varepsilon = 1$ Parabel

$\varepsilon > 1$ Hyperbel

4. Die Keplerschen Gesetze

1. Keplersches Gesetz: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren Brennpunkt die Sonne steht.

Ellipse: Kurve mit Punkten P, für die die Summe der Abstände von den Brennpunkten F_1, F_2 den konstanten Wert $2a$ hat: $\underline{r} + \underline{r_1} = 2a$.



a : Halbachse (groß)

- Kartesische Koordinatenursprung $\neq$ mit Kegelschnitts gl. v. oben

$$\underbrace{1 = \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2}}_{} \qquad \underbrace{r = \frac{k}{1+\varepsilon\cos\varphi}}_{}$$

Länge der Strecke $\overline{F_1Q} = \underset{(x<0)}{e-x} = r\cos(\pi-\varphi) = -r\cos\varphi$

Ellipsendefinition: $r_1 + r = 2a \rightarrow r_1 = 2a - r$

Pythagoras:

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= r^2 - \overline{F_1Q}^2 = r^2 - (e-x)^2 \\ y^2 &= r_1^2 - \overline{F_2Q}^2 = r_1^2 - (e+x)^2 \end{aligned}\right\} \text{gleichsetzen}$$

$$r^2 - e^2 + 2ex - x^2 = (2a-r)^2 - e^2 - 2ex - x^2$$

durch umstellen

$$\left\{\begin{aligned} ex &= a^2 - ar && \rightarrow \text{Darstellg. in kartesisch Koord.} \\ x &= \frac{a^2-ar}{e} && \rightarrow \text{Darstellg. in Polarkoordinaten} \end{aligned}\right.$$

a) Polarkoordinaten

$$x = \frac{a^2-ar}{e} \longrightarrow \underset{\uparrow\,(\text{oben})}{r\cos\varphi} + e = \frac{a^2-ar}{e}$$

$\rightarrow$ Gleichg. von r und φ $\rightarrow$ $r = r(\varphi)$

$$r = \frac{K}{1 + \varepsilon \cos\varphi} \qquad K = a - \frac{e^2}{a}$$

$$\varepsilon = \frac{e}{a} < 1 \rightarrow \text{Ellipsenbedingg.}$$

b) kartesische Koordinaten

$$ex = a^2 - ar \quad \text{suche } r = r(x, y)$$

$$ex - a^2 = -a \left(y^2 + (e - x)^2\right)^{1/2} \quad (\text{oben})$$

quadrieren, umstellen gibt Gleichg. f. Ellipse:

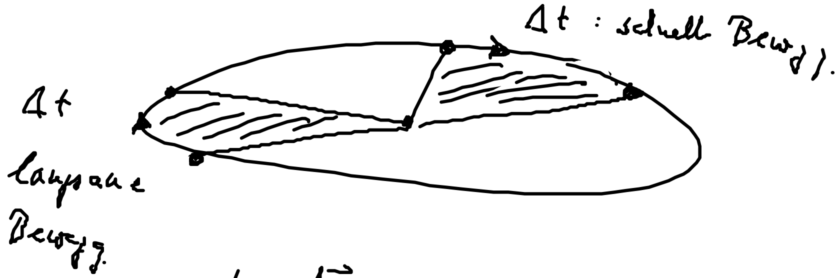
$$1 = \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}$$

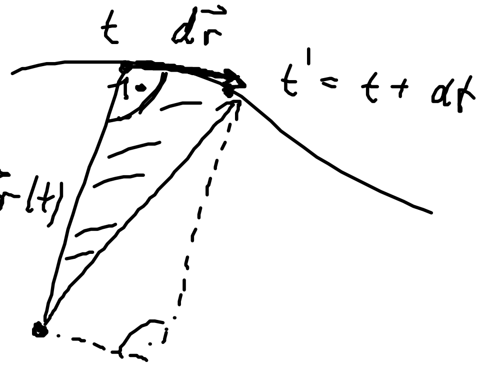
Ellipsengleichg in kartesischen Koordinaten

$a^2 - e^2 = b^2$ aus Zeichng.

2. Keplersches Gesetz

Fahrstrahl von Sonne zu Planet überstreicht in gleicher Zeit gleiche Flächen.





überstrichener Flächenstrich in Zeit dt

$$|\vec{r}| = r$$

$$dF \hat{=} \frac{1}{2}\,\text{Rechteck} = \frac{1}{2}\,|\vec{r}|\,|d\vec{r}| = \frac{1}{2} r^2\, d\varphi$$

$$|d\vec{r}| = |\vec{r}| \sin\varphi \approx |\vec{r}|\, d\varphi$$

$$dF = \frac{1}{2} r^2\, d\varphi$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} \sim \text{Drehimpuls } L_z = \text{konstant}$$

Fläche pro Zeiteinheit

$$\longrightarrow \quad \frac{dF}{dt} = \text{konstant} \longrightarrow \Delta F \sim \Delta t$$

3. Keplersches Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die großen Halbachsen:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{r^2 \dot{\varphi}}{2} \qquad (2.\ \text{Kepler})$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{L_z}{2m} = \text{konstant}$$

Fläche ein voller Umlauf ist $F_{\text{Ellipse}} = ab\pi$ (Fläche der Ellipse)

$$\frac{F_{\text{Ellipse}}}{T} = \frac{L_z}{2m} \rightarrow T = \frac{2m}{L_z} ab\pi$$

Umlaufzeit

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{konstant nach Kepler}$$

T einsetzen und

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{\left(\frac{2m}{L_z}\right)^2 a^2 b^2 \pi^2}{a^3} = \frac{(2m)^2}{L_z^2} \cdot k\pi = \text{konst}$$

$$k = \frac{L_z^2}{G m M}$$ ← Erklg nächste VL