Drehung im 2d-Raum:

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$

$$y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

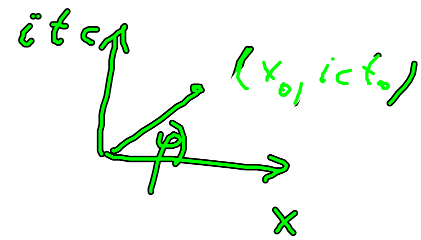
läßt $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ invariant

Anwendung auf $x^2 + c^2\tau^2 = x'^2 + c^2\tau'^2$

führt auf:

$$x \to x\,,\quad y \to c\tau = ict\,,\quad \varphi \to i\varphi$$

da eine Achse imaginär ist, muß Drehwinkel φ rein imaginär sein z. B. sei x_0, t_0 irgendein fester Punkt in



$$\operatorname{tg} i\varphi = \frac{ict_0}{x_0}$$

$$\left(\frac{\sin(i\varphi)}{\cos(i\varphi)} = \frac{i\sinh\varphi}{\cosh\varphi} = i\,\operatorname{th}\varphi \right)$$

$\rightarrow \tanh\varphi = \frac{c\,t_0}{x_0}$ ist sinnvoll für φ reell

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

Anwendung auf Drehmatrix:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(i\varphi) & \sin(i\varphi) \\ -\sin(i\varphi) & \cos(i\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & i\sinh\varphi \\ -i\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

φ muß bestimmt werden:

Ursprung Σ' ist $x' = 0$, hat sich um $\underline{\underline{x = vt}}$ bewegt nach t

nehme erste Zeile: $\underset{0}{\underset{\parallel}{x'}} = \cosh\varphi\, x - \sinh\varphi\, c\,t$

$$\cosh\varphi \, x = \sinh\varphi \, c t$$

$$\frac{x}{ct} = \operatorname{th}\varphi \overset{!}{=} \frac{v}{c}$$

Umrechnung zwischen hyperbolischen-Funktionen

$$\cosh\varphi = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\sinh\varphi = \frac{v}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\underbrace{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}_{\text{Definition}}$$

Einsetzen in Matrix:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

Umrechnungsvorschrift gewonnen:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right)$$

Lorentztransformation zwischen t', x' und t, x.

$$(\Sigma' \Leftrightarrow \Sigma)$$

wenn man diese Gleichungen glaubt, hat das Konsequenzen die im Alltag nicht offensichtlich sind.

2. Formulierung im Minkowskiraum

Minkowskiraum trägt der engen Verbindung zwischen Ort, Zeit Rechnung

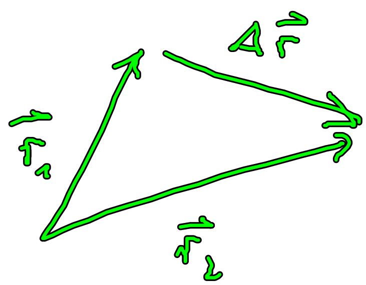
4d Vektorraum, 4d. Vektoren: $(x^\alpha) = (ct, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$

$$\alpha = 0, \underbrace{1, 2, 3}_{\text{herkömmlicher Raum}}$$

0: Zeit

2.1. Abstand im Minkowskiraum

3d euklidischer Raum:



$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$$

Abstand: $(\Delta r)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$

differentiell $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

$$= dx^1 dx^1 + dx^2 dx^2 + dx^3 dx^3$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{3} dx^\alpha dx^\alpha$$

jetzt 4d. Minkowskiraum:

welche Abstände sind hier bei Drehungen erhalten

$$ds^2 = \underbrace{c^2dt^2 - dx^2}_{\text{für Konstanz v. c nötig}} - dy^2 - dz^2$$

4d Abstand

$$\underbrace{(x^\alpha) = (ct, x, y, z)}_{\text{Kovariant (Index oben)}}$$

$$\neq \sum_{\alpha=0}^{3} dx^\alpha dx^\alpha \quad !$$

um dort gute Notation zu finden:

Einführung eines kontravarianten Vektors:

$$(x_\alpha) = (ct, -x, -y, -z)$$

$$ds^2 = \sum_{\alpha=0}^{3} dx^\alpha dx_\alpha$$

<u>Vektormechanik</u>	<u>relativist. Mechanik</u>

ds^2 = ist Größe die nicht von KS abhängt

ds^2 = ist die Größe die nicht vom KS abhängt

2.2. Länge und Zeitmessung im Minkowskiraum

- für $\frac{v}{c}$ groß ($\to 1$) werden unsere Alltagserfahrg. problematisch
- aber: Begriffe die in allen KS gelten sollen müssen lorentzinvariant sein oder es muß genau gesagt werden was gemessen wird.

a) Ist Feststellg. daß sich ein Gegenstand zu verschiedenen Zeiten am selben Ort befindet sinnvoll?

Nein, denn Σ' sagt: er bewegt sich mit v.

gilt sowohl f. Galileitrafo, als auch f. Lorentztrafo.

b) Ist die Feststellg., daß 2 Ereignisse an verschiedenen Orten (in Σ) x_a und x_b gleichzeitig statt finden sinnvoll?

Ja, Newtonmechanik: $t = t'$ (Galilei f. Zeit)

aber in relativist. Mechanik:

$$ct' = \gamma \left(ct - \frac{v}{c} x\right)$$

Σ: x_a, x_b festgelegt $\longrightarrow$ Σ'

gleichzeitig $t_a = t_b$ $\qquad$ $t_a' \overset{?}{=} t_b'$ oder nicht

$$ct_a' = \gamma \left(ct_a - \frac{v}{c} x_a\right)$$

$$ct_b' = \gamma \left(ct_b - \frac{v}{c} x_b\right)$$

da $t_a = t_b$, abziehen der Gleichg.:

$$\longrightarrow \quad c(t_a' - t_b') = \gamma \frac{v}{c} (x_b - x_a)$$

$t_a' \neq t_b'$ $\Longrightarrow$ offensichtlich treten die Ereignisse in Σ' nicht zur selben Zeit auf!

Der Begriff „gleichzeitig" ist nicht sinnvoll.

c) Zeitdilatation

physikalischer Vorgang (Tick einer Uhr, Zerfall eines Elementarteilchens)

in Σ wird dafür Δt gemessen $\quad \Delta t = t_E - t_A$

Ende $\nearrow$ Anfang $\nearrow$

in Σ' wird dafür $\Delta t'$ gemessen $\quad \Delta t' = t'_E - t'_A$

$$c t'_A = \gamma \left(c t_A - \frac{v}{c} x \right)$$

$$c t'_E = \gamma \left(c t_E - \frac{v}{c} x \right)$$

voneinander subtrahieren:

$$\Delta t' = t'_E - t'_A = \gamma (t_E - t_A)$$

$\Delta t' = \gamma \, \Delta t$ $\quad$ Zeitvorgang in Σ' ist länger als in Σ.

$\gamma > 1$ $\quad$ „gedehnt" = Dilatation

einfachstes Exp ist Zerfall v. Muonen aus Kosmos, entsteht in Höhenstrahlung:

x

Σ' 10 km Höhe
kinetische Energie
und erreicht die
Erdoberfläche

in Σ: Lebensdauer τ

Detektion

Bruchteil von c $\qquad 2\cdot 10^{-6}$ s

<u>Galilei:</u> $\quad x = (\underset{=0}{x'} + v t')\Big|_{x'=0,\, t'=\tau} = v\tau = \underline{\underline{600\,\text{m}}}$

<u>Lorentz:</u> $\quad x = \gamma (x' + v t')\Big|_{x'=0,\, t'=\tau} = \gamma v \tau = 12\,\text{km}$

$\gamma = 20$

d) Längenkontraktion

Aufgabe 11

e) Addition von Geschwindigkeiten

nächster Zettel / Tutorium

f) Konzept der Eigenzeit

$dx^2 + dy^2 + dz^2$

$\Downarrow$

heißt, daß $\sum_\alpha dx^\alpha dx_\alpha = c^2 dt^2 - dr^2 =$ für alle Beobachter derselbe Wert

$$= c^2 dt^2 \left(1 - \overbrace{\frac{dr^2}{dt^2}}^{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} / c^2\right)$$

$$= c^2 dt^2 \left(1 - v^2 / c^2\right)$$

$$d\tau^2 = dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

diese Zeit, die in allen KS denselben Wert hat, muß (invariant) nennt man Eigenzeit

brauchen die später: $\frac{d}{dt} \longrightarrow \frac{d}{d\tau}$ (Einstein)

betrachten folgende Größen: 2 Ereignisse A, E:

$$c t_A' = \gamma \left(c t_A - \frac{v}{c} x_A\right) \quad , \quad x_A' = \gamma (x_A - v t_A)$$

$$c t_E' = \gamma \left(c t_E - \frac{v}{c} x_E\right) \quad , \quad x_E' = \gamma (x_E - v t_E)$$

Differenz: $$c \Delta t' = \gamma c \Delta t - \gamma \frac{v}{c} \Delta x \; ; \; \Delta x' = \gamma \Delta x - \gamma v \Delta t \quad (*)$$

Zur Interpretation: nehmen Objekt (Elementarteilchen), wähle: Σ' fest und an Elementarteilchen gebunden: $\Delta x' \equiv 0$

$$\rightarrow (*) \quad \Delta x = v\,\Delta t$$

$$c\,\Delta t' = \left(\gamma c - \gamma \frac{v}{c} v\right) \Delta t$$

$$\Delta t' = \gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Delta t$$

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\; \Delta t$$

Die Eigenzeit ist die Zeit im mitbewegten KS in dem ein physikalischer Vorgang „ruhend" wahrgenommen wird. Die Uhr die τ anzeigt ist am Teilchen befestigt.