3. Grundgleichungen der speziell-relativistischen Dynamik

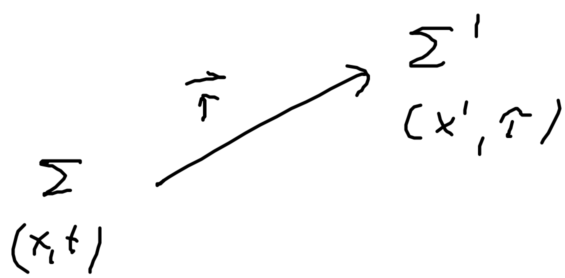
gegenüber der Galileiinvarianz der Newtongleichung muß die Lorentzinvarianz der Bewegungsgleichung hergestellt werden

Newton: Zeit t in allen KS gleich behandelt (galileiinvariant)

Einstein: Eigenzeit τ ist in allen KS gleich behandelt (lorentzinvariant)

$x_i = x_i(t)$ bei Newton : $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$ bei Einstein

Eigenzeit: Zeit die auf Uhr die fest am bewegten Objekt angebracht ist abläuft.



suche aber Bewegungsgesetze in Σ, d.h. $x^\alpha = x^\alpha(t)$ damit wir das Geschehen im Laborsystem Σ beschreiben können.

$$d\tau = \gamma^{-1}\, dt$$

3.1. Vierergeschwindigkeit

x^α ist Vierervektor und fasse $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$

$$\frac{d}{d\tau} x^\alpha = u^\alpha(\tau)$$ definiert die Vierergeschwindigkeit $\vec{u}$

Ziel $\underset{\alpha = 1,2,3}{x^\alpha} = x^\alpha(t)$

wissen, $\tau \to t$ $\qquad d\tau = \gamma^{-1}\, dt = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\; dt$

$$\Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \gamma$$

$$\vec{u}(\tau) = \frac{d}{d\tau} \overset{\text{„}x^\alpha\text{“}}{\vec{x}} = \frac{d}{d\tau}\left(ct, \vec{r}\right)$$

$$= \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right)$$

$$= \left(c\gamma, \underset{(v_x, v_y, v_z)}{\vec{v}}, \gamma\right)$$

$\vec{v}(t)$, $\gamma(t)$, weil
zur Definition der Eigenzeit
nicht die Lorentztrafo

verwendet wurde.

$$\left(ds^2 = c^2 \underline{\underline{dt}}^2 - \underline{\underline{d\vec{r}}}^2 \overset{!}{=} \text{Def} \right)$$

u^α ist damit gegeben als Funktion von t.

p^α als Viererimpuls definieren (mit m multiplizieren)

$$p^\alpha = \left(m c \gamma(t), m \gamma(t) \dot{\vec{r}}(t) \right)$$

3.2. Relativistische Bewegungsgleichung

Ansatz zur Verallgemeinerung der Newtongleichung

$$\frac{d}{dt} p_i(t) = f_i(t) \quad (\text{Newton}) \quad \equiv \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Newton}}}{f_N}$$

$$\frac{d}{d\tau} p^\alpha(\tau) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{unbekannte Vierkraft}}}{f^\alpha(\tau)}$$

hängt nicht vom KS ab weil τ nicht davon abhängt

Ziel: $\tau \to t$, transformieren auf t

$$\underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{\gamma(t)} \frac{d}{dt} p^\alpha(t) = f^\alpha(t)$$

$\uparrow$ weiterhin unbekannt

Komponenten ansehen:

$\alpha = 1, 2, 3 \quad (x, y, z) \qquad \{v^1, v^2, v^3\} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$

$$\frac{d}{dt} p^\alpha(t) = \frac{d}{dt}\left(m v^\alpha(t)\,\gamma(t)\right) \quad \text{linke Seite}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= m\left(\dot{v}^\alpha \gamma + v^\alpha \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\gamma^3 \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)\right)}_{\dot{\gamma}}\right)$$

$$= m\left(\dot{v}^\alpha(t)\,\gamma(t) + v^\alpha(t)\,\gamma^3(t)\,\frac{1}{c^2}\,\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}\right)$$

linke Seite v. $\frac{dp^\alpha}{d\tau} = f^\alpha$ berechnet,

brauchen wir noch

Forderung: $\quad \frac{d}{dt} p^\alpha = f_N^\alpha$

$\alpha = 1 \dots 3 \qquad \uparrow$ Newton Kraft

1. Ergebnis : $\frac{d}{dt}\left(m_{rel}(t)\,\vec{v}(t)\right) = \vec{f}_N(\vec{r}, \vec{v}, t)$

relativistische Verallgemeinerung der Newtongleichung

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Newton}}}{m} \longrightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Einstein}}}{m_{rel}(t)} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \vec{v} = \vec{v}(t) \qquad v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$$

- die relativistische Masse stellt ein Korrekturfaktor f. den herkömmlichen Impuls dar
- man sieht daß Newtondynamik wieder entsteht, wenn $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$

$\boxed{\alpha = 0}$ Komponente :

$$\frac{d}{d\tau} p^0 = \frac{dt}{d\tau} \underbrace{\frac{d}{dt} p^0} = \gamma \underbrace{\frac{d}{dt} \left(m c \gamma(t) \right)}$$

$$p^0 = m c \gamma(t)$$

$$\frac{d}{dt} p^0 = m \cancel{c}\, \gamma^3(t) \frac{\vec{v}(t) \cdot \dot{\vec{v}}(t)}{c^4} \overset{!}{=} \frac{\vec{f}_N \cdot \vec{v}}{c}$$

ist zu zeigen

<u>Motivation:</u> $\vec{f}_N \cdot \vec{v}$ ist Leistung,

wenn $\vec{f}_N \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \underbrace{p_0 c}$

sollte dann Energie sein, siehe 1./2. VL

<u>Nebenrechnung:</u>

$$\frac{\vec{f}_N \cdot \vec{v}}{c \cancel{\gamma}}$$ ausrechnen mit $\vec{f}_N$ von oben:

$$= \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{m}{c \cancel{\gamma}} \left(\gamma \dot{v}^\alpha + \gamma^3 \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}\, v^\alpha \right) \cdot v^\alpha$$

$$= \frac{m}{c} \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} \left(1 + \gamma^2 \frac{1}{c^2} v^2 \right)$$

$$= \frac{m}{c} \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} \left(\frac{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = \frac{m}{c} \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} \gamma^2$$

$$\leadsto m \gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}}{c} = \frac{\vec{f}_N \cdot \vec{v}}{c} \quad \checkmark$$

damit folgt: $\frac{d}{dt} p^0 = \frac{\vec{f}_N \cdot \vec{v}}{c}$, mit $p_0 = m \gamma c$

$$\frac{d}{dt}\left(m c^2 \gamma(t) \right) = \vec{f}_N \cdot \vec{v}$$

<u>Zweites Ergebnis</u>: $\frac{d}{dt}\left(m_{rel}(t) c^2 \right) = \vec{f}_N \cdot \vec{v}$ $\left(\frac{d}{dt} E_{kin} = \vec{f}_N \cdot \vec{v} \right)$

Da $\vec{f}_N \cdot \vec{v}$ als Leistung interpretiert werden kann, kann $m_{rel}(t) c^2$ als verallgemeinerte „kinetische" Energie interpretiert werden. Man schreibt daher: $E = m_{rel}(t)\, c^2$

Zusammenfassg. und Interpretation

a) Formulierung d. relativistischen Bewegungsproblems $\frac{d}{dt}\left(m_{rel}(t)\,\vec{v}(t)\right) = \vec{f}_N$

Energie ist äquivalent zur relativistischen Masse $E = m_{rel}(t)\,c^2$

b) für relativist. Probleme muß Newton gl. f. Impuls $\vec{p} = m_{rel}\,\vec{v}$ gelöst werden. die Masse m_{rel} wird bewegungsabhängig

je schneller desto schwerer:
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > 1$$
$$m_{rel} = m\,\gamma(t)$$

c) für $v \to 0$, $v/c \to 0$ wird die Newtonmechanik reproduziert

weil $\gamma \to 1$ und unabhängig von $\vec{v}(t)$

d) aus den Bewegungsgleich. folgt (gleich), daß man Körper nicht über c beschleunigen kann,

c ist maximale Geschwindigkeit

e) $E = m_{rel}\,c^2$: Energie und Masse sind äquivalent

$$\frac{dE}{dt} = \vec{f}_N \cdot \vec{v} : \text{für } \vec{f}_N = 0 \quad (\text{abgeschlossenes System})$$

ist E = konstant f. ablaufende Prozesse

Paradebeispiel sind Kernreaktionen (Massedefekt)

$$m_{rel}(t) = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad m \text{ nennt man Ruhemasse}$$

für N_1 Proton und N_2 Neutron gilt beim Zusammenfügen:

$$\underbrace{(N_1 m_p + N_2 m_N)\,c^2}_{E} \longrightarrow \underbrace{M_K}_{\text{Kernmasse}}\, c^2 + \underbrace{\Delta E}_{\text{Wärme, Strahlg. etc.}}$$

$$(N_1 m_p + N_2 m_N) \neq M_K$$

$$\longrightarrow \Delta m \text{ existiert}$$

$$\boxed{\Delta m c^2 = \Delta E}$$

f/ geringe Geschwindigkeiten.

$$E \rightarrow \frac{m}{2} v^2 \quad \text{sollte sein}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 + \underline{\underline{\frac{m}{2} v^2}} + \ldots$$

kinetische Energie nach Newton

Kleiner Term $\frac{v}{c} \to 0$, Taylorentw. Wurzel

an Newtongl. $\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{m}{2} v^2}_{E_{kin}\,!}\Big) = 0$ (2. VL)

Einstein hat damit die unbekannte Konstante zur kinetischen Energie festgelegt über $\underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}}$.

<u>Bilanzen</u>: Teilchenstoß – kinetische Energie

2 Protonen:

Pion entsteht

$$p + p + \underbrace{\text{kinetische Energie } (v)}_{\text{Teil der kin. E}} \rightarrow p + p + \pi + \text{kinetische } (v)$$

hat sich in umgewandelt

g) Energie Impuls Beziehung

bei Newton $E_{kin}(v) = \frac{m}{2} v^2$, $E_{kin}(p) = \frac{p^2}{2m}$

$(mv = p)$

Energie - Impulsbeziehung bei Newton: $E_{kin}(p) = \frac{p^2}{2m}$

bei Einstein

$$p^\alpha = (mc\gamma, m\gamma v_1, m\gamma v_2, m\gamma v_3)$$

$$p^\alpha = \left(\frac{E}{c}, \underbrace{m\gamma v_1}_{p_1}, \underbrace{m\gamma_2 v_2}_{p_2}, \underbrace{m\gamma v_3}_{p_3}\right)$$

berechne $\underbrace{\sum_\alpha p_\alpha p^\alpha}$ = konstant in allen KS = sinnvolle Größe

Betrag d. Vierervektors

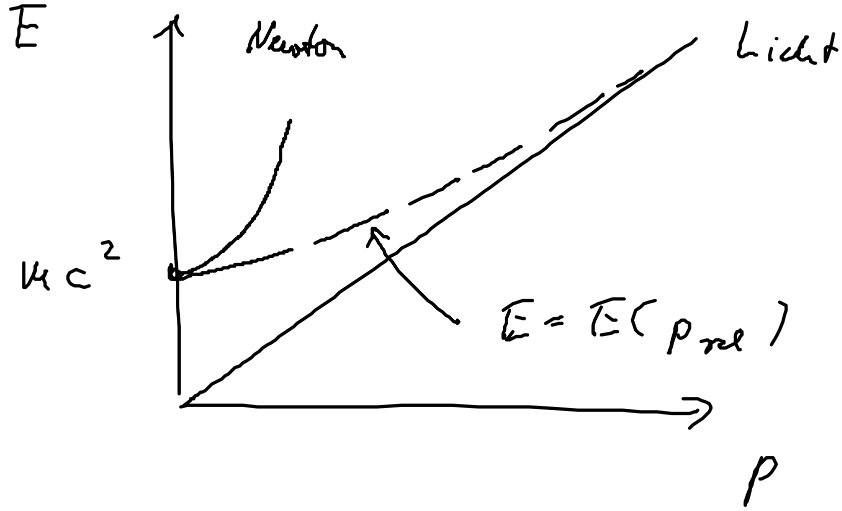
$$\sum_\alpha p_\alpha p^\alpha = \underbrace{(mc\gamma)^2 - m^2 v^2 \gamma^2} = \underbrace{\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}_{rel}^{\,2}}$$

$$\underbrace{m^2 \frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}_{re}^{\,2}$$

$$+ m^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}_{rel}^{\,2}$$

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \vec{p}_{rel}^{\,2}}$$

relativistische Energie - Impuls Beziehung



Licht und Teilchen können selbstkonsistent
nun in relativistischer Theorie beschrieben werden.

Beispiel für relativistische Dynamik

Konstante Kraft mb: bei freiem Fall: $b = -g$

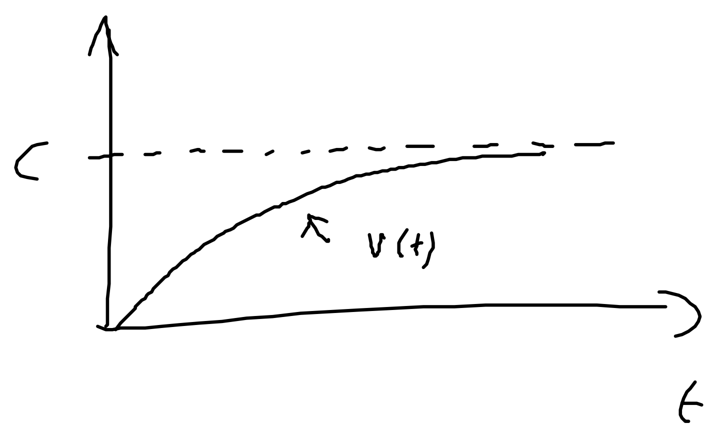
$$\frac{d}{dt}\left(\cancel{m}\,\gamma(t)\, v(t)\right) = \cancel{m}\, b \qquad v = 0,\ t = 0$$

$$x = 0,\ t = 0$$

$$v(t)\,\gamma(t) = b\, t$$

$$\frac{v(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}} = bt$$ umstellen nach $v(t)$

$$v(t) = \frac{bt}{\left(1+\frac{b^2t^2}{c^2}\right)^{1/2}} \xrightarrow[t\to\infty]{} c$$



Man kann ein Teilchen nicht über c hinaus beschleunigen

wissen $v = \dot{x}$

$$x(t) = b\int_0^t dt' \frac{t'}{\left(1+\frac{b^2t'^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{c^2}{b}\left(\left(1+\frac{b^2t^2}{c^2}\right)^{1/2}-1\right)$$