4. Einsteins Äquivalenzprinzip, metrischer Tensor

Vorbetrachtung: Newtongleichung für Teilchen $\vec{r}(t)$

im Gravitationsfeld eines anderen Massepunkts $(\vec{R}, M)$

$$\cancel{m}_t \, \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{\nabla} \frac{G \cancel{m_s} M}{|\vec{r}(t) - \vec{R}(t)|}$$

in allen Experimenten bisher: Gleichheit von träger und schwerer Masse

$(m_t = m_s)$, wird auch später f. relativistischen Gleichungen verwendet

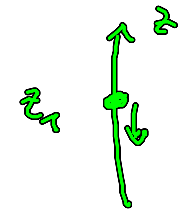
Einsteins Kritik: a) wenn sich $\vec{R}(t)$ zeitlich ändert, so „sieht" $\vec{r}(t)$ diese Potentialänderung unendlich schnell (Widerspruch zur speziellen RT, Lorentztrafo, etc.)

b) die Newtongleichung ist nicht Lorentz- sondern Galilei-invariant → nicht vereinbar mit Maxwellgleichungen f. elektromagnet. Feld mögl. Verbesserung: $$\frac{d^2 x^\alpha(\tau)}{d\tau^2} = g^\alpha(x^\beta) \qquad (m_s = m_t)$$

Lorentzinvarianz muß gewährleistet sein (τ nicht t)

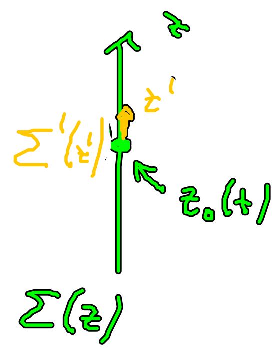
Gravitationskraft unklar in 4er Schreibweise

Idee: freier Fall in Erdnähe:



$$\ddot z = -g, \quad z = z_1 - \frac{g}{2}t^2$$

wegtransformieren der Gravitation:



$$z(t) = z_0(t) + z'(t)$$

$$\ddot z = \ddot z_0 + \ddot z'$$

$$-\cancel{g} = -\cancel{g} + \ddot z'$$

$$\to \ddot z' = 0$$

Im fallenden System Σ' spürt der Beobachter die Gravitation nicht.

Σ' ist beschleunigt und die Scheinkraft aufgrund der Beschleunigung hebt sich mit der Gravitation weg.

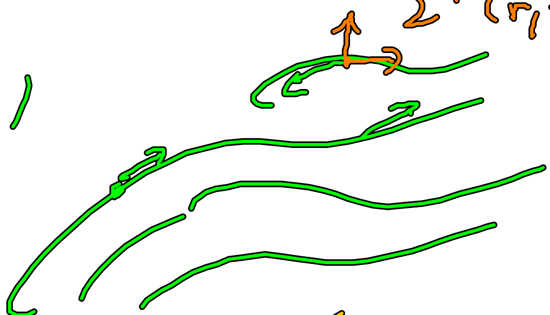
Einsteins Äquivalenzprinzip

In jedem Raum-Zeit Punkt läßt sich ein lokales Koordinatensystem Σ' finden (frei fallend), so daß in diesem KS die Naturgesetze gelten, die in nichtbeschleunigten Systemen gelten, mit Ausnahme der Gravitation. Insbesondere gilt SRT in Σ'.

$\Sigma'(\vec{r}', t') \rightarrow \xi^\alpha = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$

$\xi_\alpha = (\xi^0, -\xi^1, -\xi^2, -\xi^3)$

Feld $\vec{g}(\vec{r}, t)$



$\Sigma(\vec{r}, t)$

$x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)$

$x_\alpha = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$

im System Σ' gilt die SRT:

$$ds^2 = \text{konstant in verschiedenen KS} = \sum_\alpha d\xi_\alpha d\xi^\alpha = \sum_{\alpha,\beta} \eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta = d\xi^{0\,2} - d\xi^{1\,2} - d\xi^{2\,2} - d\xi^{3\,2}$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \qquad \equiv \eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

offenbar

Summe weglassen, wenn 1 Index oben, 1 Index unten.

am Ende $\to$ x^α-Abhängigkeit in Σ,

so: $t \leftrightarrow t'$ muß es entspr. sein: $\xi^\alpha \leftrightarrow x^\alpha$

$$d\xi^\alpha = d\xi^\alpha(x^\mu) = \sum_\mu \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\, dx^\mu$$

Kettenregel

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\, dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

g metrischer Tensor: wird sich als Verallgemeinerung des Gravitationspotentials der klassischen Physik herausstellen:

$$g_{00} \sim f\left(\varphi(\vec{r})\right)$$

Newton Grenzfall — Newton-gravitations-potential

5. Teilchen im Gravitationsfeld

wissen: Σ' gilt SRT $\longrightarrow$ $\dfrac{d^2}{d\tau^2}\xi^\alpha(\tau) = 0$ — Keine and. Kräfte

wir brauchen aber: x^α in Σ

wie kommt man von der SRT Gleichg. in Σ' zu Gl. f. x^α in Σ

5.1. Relativistische Formulierg. der Teilchenbahn

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\xi^\alpha\left(x^\beta(\tau)\right) = 0$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\sum_\beta \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{dx^\beta}{d\tau}\right) = 0$$

$$\sum_\beta \left(\left(\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\frac{dx^\beta}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}\right) = 0$$

Gleichg. mit $\sum_\alpha \dfrac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}$ multipliziert

$$\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial\xi^\alpha}\left(\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\frac{dx^\beta}{d\tau} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\alpha}\,\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta}\,\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2}\right)=0$$

$$\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial\xi^\alpha}\sum_\mu \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\beta}\,\frac{dx^\mu}{d\tau}\,\frac{dx^\beta}{d\tau}\right) + \sum_\beta \underbrace{\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\beta}}_{\delta_{\gamma\beta}}\,\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2}=0$$

$$\sum_{\beta,\mu}\underbrace{\left(\sum_\alpha \frac{\partial x^\gamma}{\partial\xi^\alpha}\,\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\beta}\right)}_{\Gamma^\gamma_{\beta\mu}}\ \cdot\ \underbrace{\frac{dx^\mu}{d\tau}\,\frac{dx^\beta}{d\tau}}_{\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}} + \underbrace{\delta_{\gamma\beta}}_{\frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2}} = 0$$

Teilchenbahn in Σ

Gleichung f. Teilchenbahn in Σ!

$$\boxed{\frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2} = -\Gamma^\gamma_{\beta\mu}\,\frac{dx^\mu}{d\tau}\,\frac{dx^\beta}{d\tau} \qquad *}$$

Bemerkungen

a) Γ sind Christoffelsymbole, über β,μ wird summiert

b) wenn Γ bekannt, so ist $\ast$ eine Gleichung f. Bahnkurve in Σ, $x^\alpha(\tau)$ berechenbar

c) es gilt ein Zusammenhang zwisch. Γ und g

$$\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \frac{g^{\sigma\nu}}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right)$$

! ohne Vorrechnen !

Γ : kann Gravitationskraft interpretiert werden

g : als Gravitationspotential

$g^{\sigma\nu}$: inverse Tensor / Matrix

$$g^{\sigma\tau} \cdot g_{\tau\mu} = \delta^\sigma_\mu$$

!?

d) Einsteinsche Feldgleichungen legen Zusammenhang zwisch. g und der Materieverteilung fest.

$$g = g(\text{Materie})$$

5.2. Grenzfall Newtonmechanik

legt uns g^{00} fest im Limes $v \ll c$

$$u^\alpha(\tau) = \frac{d}{d\tau} x^\alpha(\tau) = (\gamma c, \gamma v_1, \gamma v_2, \gamma v_3)$$

letzte VL $\quad \gamma(t), v(t) \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \underset{v \ll c}{\approx} 1$

$$\underset{v \ll c}{u^\alpha(\tau)} = (c, 0, 0, 0)$$

Bewegungsgleichung im Newtongrenzfall:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \underbrace{\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}$$

volle Schönheit!

$u^\alpha = (c, 0, 0, 0)$

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma^\alpha_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau}$$

$$\underset{\text{lt Formel}}{\Gamma^\alpha_{00}} = \frac{g^{\alpha\nu}}{2} \left(\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\nu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \right)$$

Näherung: Metrik potential ist quasi statisch

Lasse alle Ableitungen nach t weg, d.h. $\frac{\partial}{\partial x^0} \to 0$.

$$\Gamma^{\alpha}_{00} = -\frac{g^{\alpha\nu}}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\nu}}$$

$g^{\alpha\nu}$ ist metrischer Tensor, soll genähert werden:

$$g^{\alpha\nu} = \eta^{\alpha\nu} + \varepsilon^{\alpha\nu}$$

ohne Gravitation — kleine Änderung durch Gravitation

$$\Gamma^{\alpha}_{00} = -\frac{\eta^{\alpha\nu}}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \varepsilon^{00} \quad \text{in 1. Ordnung } \varepsilon$$

$\alpha = 1 - 3 \equiv i$ eingesetzt Γ

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = +\Gamma^{i}_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\eta^{ij}}_{=-\delta_{ij}} \frac{\partial}{\partial x^j} \varepsilon^{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2$$

es gilt eine
absolute Zeit
$\tau = t' = t$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\varepsilon^{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2$$

was ist das? $u^{\alpha=0}$

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\varepsilon^{00} c^2 \quad (\text{oben, siehe } u^{\alpha^0})$$

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \overset{!}{=} -\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\varphi(\vec{r})}{m} \quad \text{nach Newton}$$

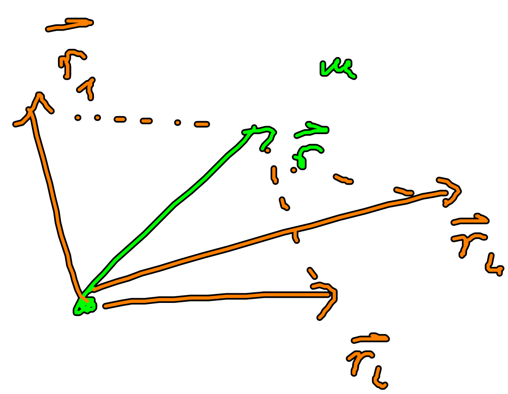
Damit ergibt sich als einfachster Fall $v \ll c$

$$\varepsilon^{00} = \frac{2}{c^2}\frac{\varphi(\vec{r})}{m}, \quad g^{00} = 1 + \frac{2}{c^2}\frac{\varphi(\vec{r})}{m}$$

damit ist metrischer Tensor f. Newton Grenzfall festgelegt.

wie sieht $\varphi(\vec{r})$ aus?

$$\varphi(\vec{r}) = -\sum_u \frac{G\, m\, m_u}{|\vec{r} - \vec{r}_u|}$$



weil sich in Newton gl. m rauskürzt

Schreibt man auch $\frac{\varphi}{m} \to \varphi$

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi(\vec{r})}{c^2}$$

mit den gegeben g_{00}

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

Abstände der SRT sind modifiziert

durch die Gravitation