

6. Einige Folgerungen aus dem Äquivalenzprinzip

beschränken uns auf Newton Grenzfall

6.1. Ruhende Uhr in Gravitationsfeld

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{00} dx^0 dx^0$$

↑
Tick einer Uhr,
die sich am
physikalisch Vorgang
befindet (Σ')

← enthält
Einfluss des
Gravitationsfelds

← für eine ruhende Uhr in Σ
($dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$)
Ortskoordinaten ändern
sich nicht.

Idee: Vergleich der Uhren mit und ohne Gravitationsfeld

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0 = \sqrt{g_{00}} dt \quad (x^0 = ct)$$

$d\tau$ gibt mit (m) und dem Gravitationsfeld (0) Vergleich

ohne Gravitation: $g_{00} = \eta_{00} = 1 \rightarrow d\tau = dt_0$

mit Gravitation: $\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 + 2 \frac{\varphi(\vec{r})}{c^2}} \approx 1 + \frac{\varphi(\vec{r})}{c^2}$
↑

1. Ordng. Taylor

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt_m$$

$$\rightarrow \frac{dt_0}{dt_m} = 1 + \frac{\varphi(r)}{c^2} < 1 \quad (\varphi < 0)$$

$dt_0 < dt_m$: Wenn im Gravitationsfeld gehen langsamer

Vorstellung: es sind derselben physikalischen Vorgang
dauert mit / ohne Gravitation
unterschiedlich lang

6.2. Photon im Gravitationsfeld

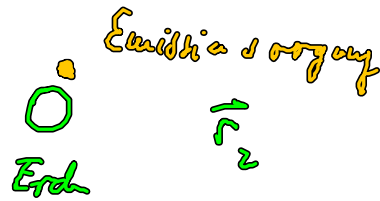
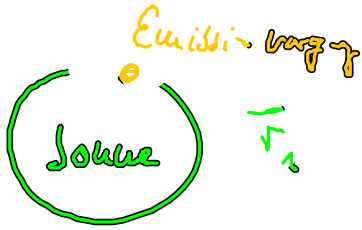
Sehr besondere Uhr wählen : Atom das Licht aussendet

entsprechend Frequenz: $\omega \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \frac{1}{dt}$ bestimmt Zeitintervall

z.B. Schwingungsdauer

ohne Gravitation : $\omega_0 \sim \frac{1}{dt_0}$ mit Gravitation : $\omega_m \sim \frac{1}{dt_m}$

$$\rightarrow \frac{\omega_m}{\omega_0} = \frac{dt_0}{dt_m} = \sqrt{g_{00}} \approx 1 + \frac{\varphi(r)}{c^2}$$



$$\frac{\omega_{em}(\vec{r}_s)}{\omega_{em}(\vec{r}_L)} = \frac{1 + \varphi(\vec{r}_s)/c^2}{1 + \varphi(\vec{r}_L)/c^2} \approx 1 + \frac{\overbrace{\varphi(\vec{r}_s) - \varphi(\vec{r}_L)}^{\Delta\varphi}}{c^2}$$

↑
Taylor 1. Ordng.

relative Änderung:

$$\frac{\omega(\vec{r}_s) - \omega(\vec{r}_E)}{\omega(\vec{r}_E)} \approx \frac{\Delta\varphi}{c^2} \approx \frac{\varphi(\vec{r}_s)}{c^2} < 0$$

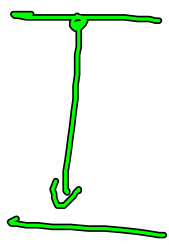
Die relative Frequenzänderung im Gravitationspotential bei Lichtabstrahlung ist $\frac{\Delta\omega}{\omega} < 0 \rightarrow$ Rotverschiebung

Größenordnung: 10^{-6} , ist gemein und fällt schwer

Die Rotverschiebung kann durch Arbeit gegen Gravitationsfeld erklärt werden.

ODER Pound-Rebka - Versuch 1960,

20m



Photon laser

Veränd. d. Frequenz an 2. Stelle im
Erdfeld

beweist ein Blau verschieb. detektiert wird
(Energiegewinn im Feld)

6.3. Lichtgeschwindigkeit in Gravitationsfeldern

Veränderung der Lichtgeschwindigkeit d. Gravitation:

$$\text{SRT} : ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0$$

$$\text{ART} : ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0$$

$$\text{Nurte } g_{00} = \text{fall} \quad \approx \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - d\vec{r}^2$$

$$\text{Licht} : ds^2 = 0$$

$$\text{SRT} : c = \frac{d|\vec{r}|}{dt} \Big|_{\text{SRT}} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Lichtgeschwindigkeit,} \\ \text{bei Lichtfront beobachtet} \end{array}$$

ART $c = \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right) \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$ ART mit $\varphi \neq 0$

$\rightarrow \frac{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_m}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_0} = \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right)$

$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_m \rightarrow c_m$

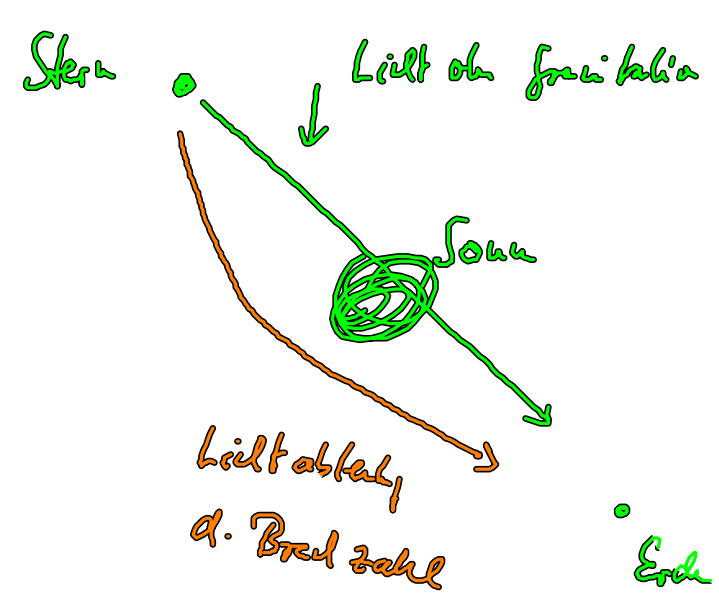
$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_0 \rightarrow c_0$

$c_m = c_0 \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right)$

< 0

$c_m < c_0$

Die Gravitation wirkt wie Brechzahl



1919 Eddington
darauf Einstein wohl beruht

Modern Anwendung: Metamaterialie - Design via Brechzahl < 0
 $u(\vec{r})$ designen
 (Tarnumhänge)

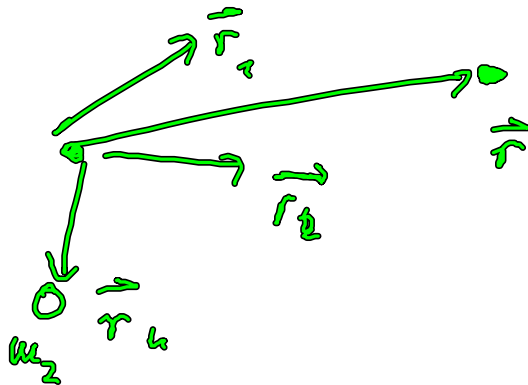
7. Einstei - Feldgleichungen

bisher $g_{\mu\nu}$ unbekannt, nur f. schwach Felder: $g_{00} = g_{00}(\varphi)$
 ↑
 Newtonpotential

Einsteins Leistung: Beziehung zw feld φ und der
 Masse $g_{\mu\nu}$ an Massenverteilung berechnen kann

7.1. Newton potenzial der Einstei Gleichungen

find Gravitationsfeld nach Newton: $\varphi(\vec{r}) = \sum_n \frac{-G m_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|}$



↑
 Summe über alle m_n
 um Feld bei \vec{r}
 zu erhalten

es kann gezeigt werden: $\Delta \varphi = 4\pi G \rho_M(\vec{r})$

$$\text{Massendichte: } \rho_M = \sum_u m_u \delta(\vec{r} - \vec{r}_u)$$

Newton'sche Gravitationsgleichung f. φ

Gleichung wird bewiesen über 2 Schritte:

$$\text{Zeige, dass } \Delta \varphi = 0 \quad (\vec{r} \neq 0)$$

$$\int d^3r \Delta \varphi = -4\pi$$

$$\text{f. } \varphi = \frac{1}{|\vec{r}|} \text{ ist}$$

Jede Gravitationspotential kann über Massendichte beschrieben werden.

$$1. \text{ Idee: } g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \rightarrow \varphi = \frac{c^2 g_{00} - c^2}{2}$$

$$\text{damit ist } \Delta \varphi = G 4\pi \rho_M$$

$$\Delta g_{00} = \frac{G 4\pi \rho_M}{c^2}$$

bestimmt g_{00} f. beliebige
Massenpunktverteilungen

Wie wird diese Gleichung verallgemeinert auf $g_{\alpha\beta}$?

7.2. Einsteins Feldgleichungen

$g \sim g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$ metrischer Tensor

$\rho_H \rightarrow T_{\mu\nu}$ Energie-Impulstensor $T(g_{\mu\nu}, u^\alpha)$

Ricci Tensor (hängt von $g_{\mu\nu}$ ab)

Krümmungstensor ($g_{\mu\nu}$)

$$R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} R = -\frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \quad \text{Einsteins Feldgl.}$$

$$\Delta g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} \rho_H \quad \text{Newton'sche Feldgl.}$$

Einsteingl. sind ein System v. Dgl. für $g_{\mu\nu}$ wenn $T_{\mu\nu}$ vorgegeben wird.

8. Schwarzschild metrik und relativistisches Gravitationspotential

Gleichung f. 1 Massepunkt gelöst, analog 2 Massen:

1 MP + Probekörper $\hat{=}$ Sonne + Planet und leicht lösbar

$$ds^2 = g_{00} c^2 dt^2 - g_{rr} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta dy^2)$$

8.1. Plausibel auch das Schwarzschild metrik

ohne Funktion: Metrik $g_{\mu\nu}$ in Kugelkoordinaten

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2$$

Kugelkoordinaten:

an VL abgelesen

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{r}\vec{e}_r$$

$$d\vec{r} = r d\vartheta \vec{e}_\vartheta + r \sin\vartheta d\varphi \vec{e}_\varphi + dr \vec{e}_r$$

(dt^2 kürzen)

$$d\vec{r} \cdot d\vec{r} = d\vec{r}^2 = r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + dr^2$$

$$ds^2 = \overset{g_{00}}{c^2} dt^2 - \overset{g_{rr}}{dr^2} - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$$

Übergang zu Schwarzschild metrik!

plausibel: rotations- u. s. symmetrisches Problem (sollte nur v. r abhängen
nicht v. Winkel)

$$g_{\theta\theta} \rightarrow 0$$

$$g_{\phi\phi} \rightarrow \text{Nennwert für } \phi$$

$$g_{rr} \rightarrow g_{\phi\phi}^{-1}(r)$$

8.2. Teilchenbahnen f. Schwarzschildmetrik

$g_{\alpha\beta}$ ist bekannt, so:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^{\mu} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau}$$

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\sigma} \right)$$

am Licht VL

dann kann in Prinzip x^μ bestimmt werden

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} g^{rr} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r}$$

Energie Energiedichte analog zu Newton

↑ Energie
↓ Konstant

$$= \frac{m c^2 (k-1)}{2}$$

$\frac{d}{dt}$

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{L^2 r_s}{2mr^3}$$

kinetisch
Energie \dot{r}

Gravitations-
potential

Drillings-
potential

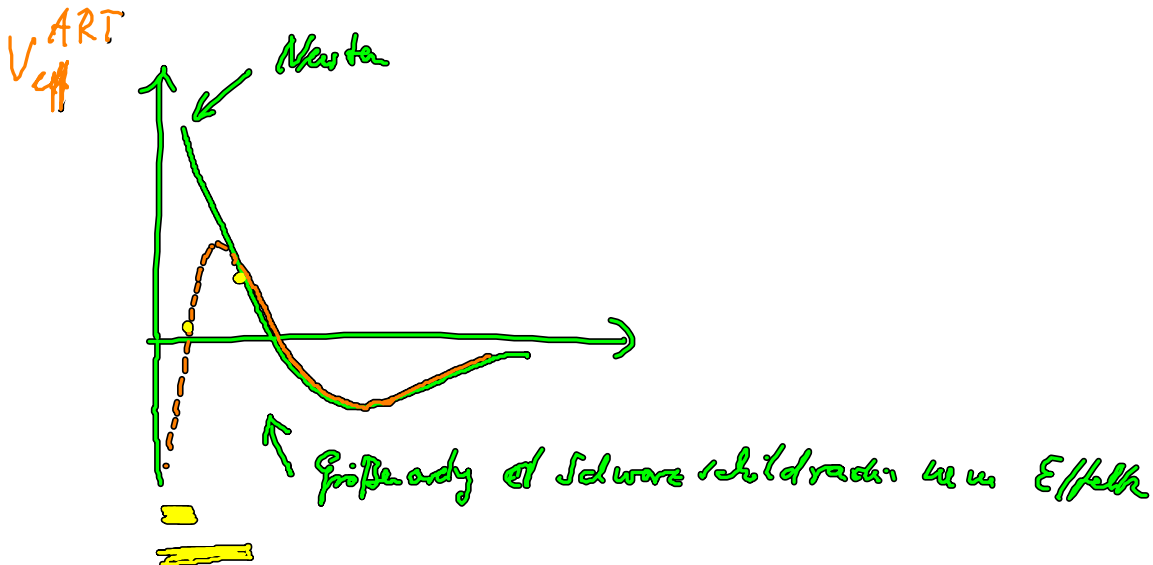
relativistisch
Konstante

$$\frac{1}{r^3}$$

r_s Schwarzschild radius = $\frac{2GM}{c^2}$

Berechnungen

a) Schwarzschild radius hilft als neues Parameter auf
Abhängigkeit mit $\frac{1}{r^3}$ f. wenn u. Potential fern



b) Einstei: Richtdrehung d. Merkur

c/ wenn Masse auf Seite $< r_s$ verteilt ist \Rightarrow

so hat man ein schwarzes Loch, Tidal kann in Tidalis fallen

warum schwarzes Loch?

$$\omega_m = \sqrt{g_{00}} \omega_0 = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \omega_0$$

$r < r_s$, also immer schwarzes Loch

\rightarrow Frequenz wird imaginär

\rightarrow kein Lichtausbreitung.