

VI Kanonisches Formalismus

1. Bisher nicht bedacht:

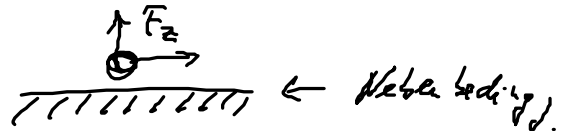
Mit Newton-Theorie steht komplettes Werkzeug zur Verfügung, aber moderne Theorie unterscheidet sich, kann bequem gestaltet werden:

a) Bewegungsgleichungen die in allen Koordinaten gelten, d.h. kartesisch, Zylinder, Kugel, etc ...

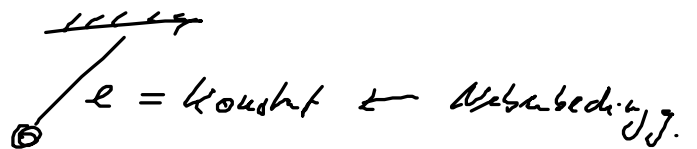
($m\ddot{x}_i = f_i$; $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = f_r$ sehen unterschiedlich aus
→ gibt es eine mehr allgemeine Form d. Koordinaten)

b) Einbau geometrischer Nebenbedingungen / Zwangsbedingungen

Beispiele: Bewegg. auf Tisch



Fadenpendel



c) Möglichkeit der Verallgemeinerung d. Newton-mechanik zur Quantenmechanik (konjugierte Variable)

→ Hamilton formalismus

d) Formalismus soll f. Felder aufbereitet werden

2. Prinzip erlesener Wirkung (Hamiltons Prinzip)

und Euler-Lagrange Technik

2.1. „kompliziert“ Ableitung der Newtongleichung

Newton gl. kann aus Hamiltons Prinzip (a-d) abgeleitet werden:

$$\text{Teilchen in Potential } V(\vec{r}) \quad \text{mit } \ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

Hamiltons Prinzip :

(Rezept)

a) Man schreibt die Lagrange funktion auf

$$L = T - V = L(\vec{\dot{r}}, \dot{\vec{r}})$$

↑ ↑

kinetisch potentielle Energie

später t

b) Man schreibt die Wirkungs funktion S auf:

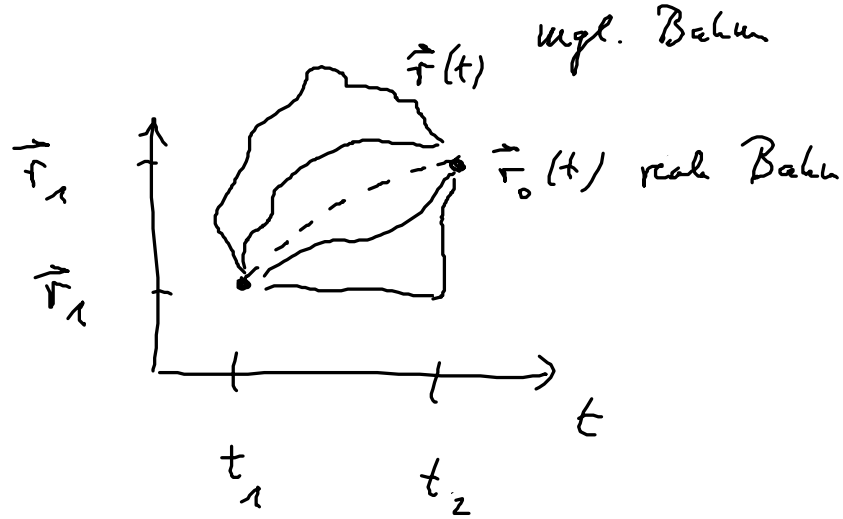
$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{\dot{r}}(t), \dot{\vec{r}}(t)) \stackrel{!}{=} \text{extremal}$$

c) Sei das $\vec{r}_0(t)$ aus Gruppe mögl. Bahnen zwischen

$\vec{r}(t_1), \vec{r}(t_2)$ soll S extremal werden,

dann ist $\vec{r}_0(t)$ die reale Bahn, die das

Teilchen nimmt



d/ bei $\vec{r}(t_1)$ und $\vec{r}(t_2)$

fallt alle Bahn zusammen

→ Ziel: Ableitg. d. Newton'schen Grundgesetzes:

wie geht man mit Extremalbildg um?

Funktion: $f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(x)}_{x_0} (x - x_0) + \dots$

= 0

wenn die 1. Ableitg $\rightarrow 0$

dann liegt Extremum vor

$\delta f \hat{=}$ Ändg. d. Funktion

↳ Funktional $S(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = S(\vec{r}_0) + \delta S$

$\hat{=}$ Ändg. d. Funktion

hängt v. Funktionen ab

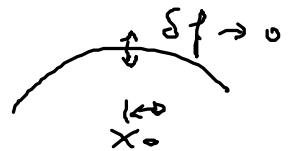
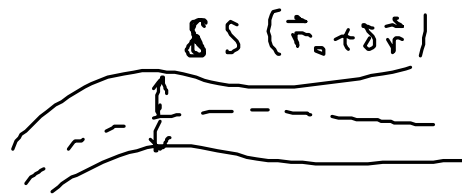
= 0

Fordy.

Hamiltonprinzip $\delta S = 0$

Variation v. S soll
verschwinden

Um Variation auszurechnen $\vec{r}_0 + \delta \vec{r} \longleftrightarrow x_0 + \Delta x$



(a-d) f. Newtongleichung abarbeiten:

a) $L = T - V = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$

b) $S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2(t) - V(\vec{r}(t)) \right)$

c) $\delta S = 0$ anwenden!

mit $\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0(t) + \delta \vec{r}(t)$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2} \left(\dot{\vec{r}}_0^2 + 2\dot{\vec{r}}_0 \cdot \delta \dot{\vec{r}} + \cancel{\delta \dot{\vec{r}}^2} \right) - V(\vec{r}_0 + \delta \vec{r}) \right]$$

Klein Ändg. $\delta \vec{r}$ analog dx bei Funktion

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}_0) + \underline{\vec{\nabla} V(\vec{r}_0) \cdot \delta \vec{r}}$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}_0^2 + V(\vec{r}_0) \right) + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(m \dot{\vec{r}}_0 \cdot \delta \vec{r} - \vec{\nabla} V(\vec{r}_0) \cdot \delta \vec{r} \right)$$

$S_0 \hat{=} \text{Wirkj. d.}$
reel Bahn

$$S - S_0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(m \dot{\vec{r}}_0 \cdot \delta \vec{r} - \vec{\nabla} V(\vec{r}_0) \cdot \delta \vec{r} \right)$$

benutzen:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left[\dot{\vec{r}}_0(t) \cdot \delta \vec{r}(t) \right] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\dot{\vec{r}}_0 \cdot \delta \vec{r}(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = \dot{\vec{r}}_0(t_2) \cdot \delta \vec{r}(t_2) - \dot{\vec{r}}_0(t_1) \cdot \delta \vec{r}(t_1)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

t_2

lt. Vorausss.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(m \dot{\vec{r}}_0 \cdot \delta \dot{\vec{r}} - \underbrace{m \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_0 \cdot \delta \vec{r})}_{=0} - \vec{\nabla} V(\vec{r}_0) \cdot \delta \vec{r} \right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\underbrace{-m \ddot{\vec{r}}_0 - \vec{\nabla} V(\vec{r}_0)}_{=0} \right) \cdot \delta \vec{r} \stackrel{!}{=} 0$$

Variation $\neq 0$ außer Rand
und kann unabhängig
gewählt

$$m \ddot{\vec{r}}_0 = -\vec{\nabla} V(\vec{r}_0)$$

ist dann aus Hamiltonprinzip abgeleitet,

und dies kann zur Grundlage d. Mechanik gemacht werden.

2.2. Euler-Lagrange Gleichung f. Teilchen

jetzt Wirkt gedanklich in beliebigen Koordinatenformulieren bracketen

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(\dot{q}_i) - V(q_i, t)$$

$$q_i: (x, y, z), (r, \varphi, \vartheta), (r, \varphi, z)$$

reale Bahn

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = \int q_i(t) \rightarrow q_i^0 + \delta q_i(t)$$

Variation

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\underbrace{\mathcal{L}(q_i^0, \dot{q}_i^0, t)}_{S_0} + \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^0} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i^0} \delta \dot{q}_i \right) \right)$$

$$\underbrace{\delta S}_{S - S_0} = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^0} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i^0} \delta \dot{q}_i - \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i^0} \delta q_i \right)}_0 \right)$$

$$= \sum_i \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^0} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i^0} \right)}_{=0} \delta q_i \right) \stackrel{!}{=} 0$$

beliebig variieren: linear unabhängig!

Lagrange Gleichung 2. Art ohne weitere geometrische Nebenbedingung.

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$$

gilt beides f. Teilchen ohne weitere geometrische Nebenbedingung.

Bemerkungen

a) 1. Art kommt auch!

b) Vertrauen gewinnen:

$$\text{1d. freies Teilchen: } L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \quad \overset{q_i = x}{\rightarrow} \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$0 - m\ddot{x} = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{1d. Oszillator } L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$-kx - m\ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{x} = -kx \quad \checkmark$$

c/ man definiert sich $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \equiv p_i$ als die zugehörige Impuls zur Koordinate q_i

man nennt q_i und p_i zueinander kanonisch

(kanonisch Variable)

d) Energie: $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$

vollständige Differential bilden.

$$\frac{d}{dt} L = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right)$$

$\frac{d}{dt} L = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$ Produktregel

$$= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$$

$$- \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right)$$

wird Energie E sein:

Wir zeigen, daß $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$ die Energie ist

bei kartesischer Koordinate $x_i = (x, y, z)$

$$= \sum_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} L \dot{x}_i - \sum_i \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 + V(x_i, t)$$

mit $L = \sum_j \left(\frac{m}{2} \dot{x}_j^2 - V(x_j, t) \right)$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum_j \left(\frac{m}{2} \dot{x}_j^2 - V(x_j, t) \right)$$

$$= \sum_j \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \frac{m}{2} \dot{x}_j^2 - 0$$

$$= \sum_j \frac{m}{2} \cdot 2 \dot{x}_j \underbrace{\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i}}_{\delta_{ij}}$$

$$= m \dot{x}_i$$

oben einsetzen

$$= \sum_i \dot{x}_i m \dot{x}_i - \sum_i \left(\frac{m}{2} \dot{x}_i^2 - V(x_i, t) \right)$$

$$= \sum_i \left(\frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 + V(x_i, t) \right)$$

$$--- = T + V$$

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = T + V = \text{Energie}$$

gilt f. beliebige Koordinate:

$$\frac{d}{dt} E = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$L = L(t) = T - V(\vec{r}, t)$$

Änderung d. Energie $T+V$ wird durch die

Zeitabköh. der Lagrange fkt. bestimmt

Wenn V nicht von t abhängt, so ist $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

und die Energie ist erhalten