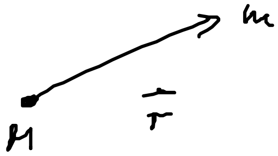
2.3. Beispiele für Lagrangegleichungen 2. Art

a) Keplerproblem (ÜA 15)

feststehende Sonne M, Planet m



$$L = T - V = \frac{m}{2}\dot{\vec r}^{\,2} + \frac{GmM}{r} \quad \text{in Kugelkoordinaten}$$

$$\vec r = r\,\vec e_r \;\Downarrow\; \dot{\vec r} = \dot r\,\vec e_r + r\dot\vartheta\,\vec e_\vartheta + r\sin\vartheta\,\dot\varphi\,\vec e_\varphi$$

$$\Downarrow\; L = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2\right) + \frac{GmM}{r}$$

$$q_i = \{r, \vartheta, \varphi\} \quad \text{für} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r\dot\vartheta^2 + m r\sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2 - \frac{GmM}{r^2}\,; \quad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r$$

usw.

(i) zur Festlegung d. Drehimpulses: p_φ berechnen, mit $L_z = [m\vec r \times \vec p]_z$ vergleichen.
($x = r\sin\vartheta\cos\varphi$
$y = r\sin\vartheta\sin\varphi$)

(ii) wähle nun $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (warum mgl.!?)

(i, ii) $\to$ führt zur Bahngleichung d. Keplerproblems

b) Teilchen im elektromagnetischen Feld (ÜA 17)

$$\vec f_L = q\Big(\underbrace{\vec E(\vec r, t)}_{\text{elektr. Feld}} + \vec v(t) \times \underbrace{\vec B(\vec r, t)}_{\text{magnet. Feld}}\Big) \quad \text{Lorentzkraft}$$

Ziel: L zu finden, welches die Lorentzkraft in der Newton gl. reproduziert

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{f}_L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad , \quad L = T - V$$

kennen: $T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2$

Darstellg. von V über $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

E, B wird auf 2 andere Felder zurückgeführt:

Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$

Skalares Potential $\phi(\vec{r}, t)$

$$V = V(\vec{A}, \phi)$$

$S(L)$

Richard Feynman:

„The question of what the action should be ...
must be determined by some kind of trial and error ...
you have to fiddle around."

L muß geraten werden bzw $\underline{\underline{V}}$

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 \underbrace{- q\phi} + \underline{q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}}$$

potentielle Energie
im Potential

diese Lagrangefunktion erzeugt die richtige Bewegungsgleichungen

wie reproduziere Sie die Lorentzkraft:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$$ in kartesischen Koord. berechnen $x_i = \{x, y, z\}$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -q\frac{\partial}{\partial x}\phi + q\,\dot{\vec{r}}\cdot(\partial_x A_x, \partial_x A_y, \partial_x A_z)$$

„produktive Null": addiere von Term wie:

$$0 = \dot{y}\,\partial_y A_x - \dot{y}\,\partial_y A_x$$

$$0 = \dot{z}\,\partial_z A_x - \dot{z}\,\partial_z A_x$$

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$= -q\,\partial_x\phi + q(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla})A_x + q\left[\dot{\vec{r}}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right]_x$$

dazu Aufgabe 17a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + q\frac{d}{dt}A_x$$

aufsammeln alle Terme:

$$m\ddot{x} = q\left(E_x(\vec{r},t) + \left[\dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r},t)\right]_x\right)$$

→ Lorentzkraft läßt sich reproduzieren

2.4. Euler-Lagrangetechnik für Vielteilchensysteme

die Darstellg. und das Rechnen mit Wirkg S hatten wir über $\{q_i\}_{i=1,2,3}$ f. 1. Teilchen bisher.

Rechng. legt sich aber nicht auf 1 Teilchen fest.

$$L = T(\dot{x}_{ni}) - V(x_{ni})$$

ite Koordinate n-te Teilchens

x_{23} : z-Koordinate des 2.ten Teilchens

$x_{ni} \rightarrow q_j$ nennen

$$(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22} \cdots) \qquad (q_1, q_2, q_3, q_4 \cdots)$$

damit gelten die L-2 Art auch für viele Koordinaten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad i = 1 \cdots 3N$$

bei N Teilchen

<u>Beispiel:</u> viele Teilchen die über Gravitation wechselwirken

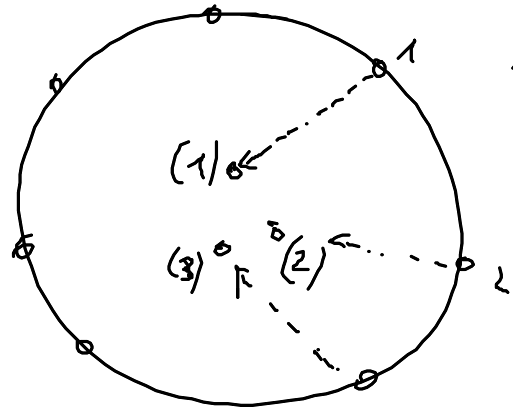
$$T = \sum_n^N \frac{m_n}{2} \dot{\vec{r}}_n^{\,2} \qquad V = ?$$

Summe über alle N Teilchen

n - Summationsindex

es verbleibt V zu bestimmen

überlege uns welche potentielle Energie in Massenverteilg. steckt:



Kugel im ∞ entfernt

Teilchen liegen darauf sind frei

gilt: schrittweiser Aufbau des Systems im endlichen und dabei berechnen der Energie E

- erste Masse: $\Delta E = 0$, hat dieselbe Energie wie in ∞

- zweite Masse: m_1 ist schon da!

$$\Delta E = \Delta V_1 = -\frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

- dritte Masse: m_1, m_2 sind da

$$\Delta E = \Delta V_2 = -\frac{G m_1 m_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} - \frac{G m_2 m_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}$$

- n-te Masse:

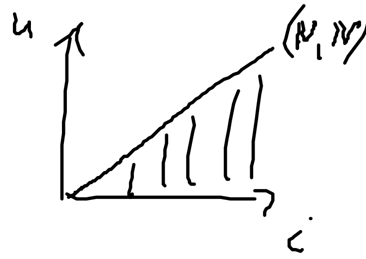
$$\Delta E = \Delta V_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{-G m_i m_n}{|\vec{r}_i - \vec{r}_n|}$$

die gesamte angehäufte potentielle Energie ist:

$$V = -\sum_{n=1}^{N} \sum_{i<n} \frac{G m_i m_n}{|\vec{r}_i - \vec{r}_n|}$$

Doppelzählungen verhindern

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{\substack{i=1 \\ n \neq i}}^{N} \frac{G m_i m_n}{|\vec{r}_i - \vec{r}_n|}$$



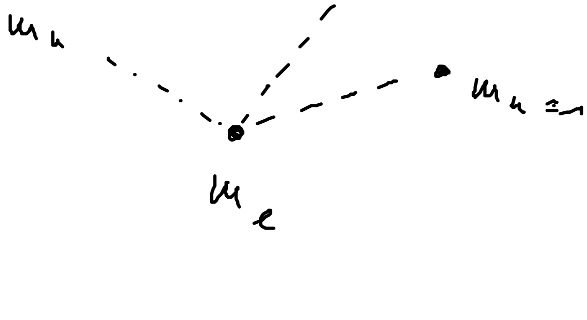
ÜA16: Lagrangefunktion ww. Teilch Gleichungen

$$L = T - V = \sum_{ni} \frac{m_n}{2} \dot{x}_{ni}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n,m}^{N,N} \frac{G m_n m_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|}$$

kartesisch Koordinat

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ej}}, \quad \frac{\partial L}{\partial x_{ej}} \longrightarrow$$ einsetzen in Lagrange 2. Art

$$m_e \ddot{x}_{ej} = -G m_e \sum_{n} \frac{m_n (x_{ej} - x_{nj})}{|\vec{r}_e - \vec{r}_n|^3}$$



Summe der einzelnen Kräfte

2.5. Euler-Lagrange Formel f. Felder

2.5.1. Feldgleichungen d. Analogieschluß

Teilchen $\vec{r}(t)$

Koordinate $q_i(t)$

Variable $\underline{t}$

$$S = \int \underline{dt}\, L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$$

Feld $\vec{\phi}(\vec{r}, t)$

Koordinate ϕ_i

Variable: $t, \underline{\underline{\vec{r}}}$

$$S = \int dt \int \underline{\underline{d\vec{r}^3}}\; \mathcal{L}(\phi_i, \dot{\phi}_i, \phi_{i/j})$$

Lagrangedichte wird 1/V zusätzlich

$$\dot{\phi}_i = \frac{\partial}{\partial t}\phi_i, \quad \phi_{i/j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\phi_i$$

Wirkprinzip $\delta S = 0$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$$

$\delta S = 0$

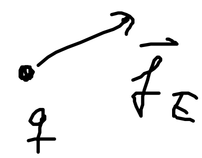
$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i} + \sum_j \underline{\underline{\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i/j}}}}}$$

$$L = T - V$$

oder „you have to fiddle around ..." $\longrightarrow$ you have to fiddle around

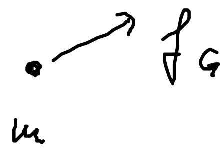
2.5.2. Das Gravitationsfeld

analog zum elektrische Feld $\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q}$



wird Gravitationsfeld eingeführt:

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_G}{m}$$



2 wichtige Zusammenhänge:

a) $\vec{F}_G = -\vec{\nabla} \varphi$ Gravitationskraft kann als Gradient eines Potentials dargestellt werden

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} \frac{\varphi}{m}$$ mit Probemasse

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} \varphi$$ „$\varphi \to \frac{\varphi}{m}$"

b) $$\varphi = -\sum_n \frac{G m_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|}$$ Gravitationspotential φ

das der Massepunkt m bei $\vec{r}$ verspürt, kann durch

$$\boxed{\Delta \varphi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r})}, \quad \rho(\vec{r}) = \sum_n m_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n)$$

Massedichte

Laplaceoperator

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

berechnet werden

man kann also φ auch durch Lösung der Potentialgleichung $\Delta \varphi = 4\pi G \rho$ finden

Beweis ÜA, Tutorium

Ziel: $\mathcal{L}$ für das Gravitationsfeld aufzuschreiben

wissen: $$V = -\frac{1}{2} \sum_{n,i}^{NN} \frac{G m_i m_n}{|\vec{r}_i - \vec{r}_n|} \overset{!}{=} f(\vec{g})$$

potentielle E einer Masseverteilung

Wenn es gelingt $\vec{g}$ in $V = V(\vec{g})$ einzuführen,

so hat man eine Lagrangedichte $\mathcal{L}$ f. $\vec{g}$.

$$V = -\frac{G}{2} \int d^3r \int d^3r' \; \frac{\rho(\vec{r})\,\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

mit Hilfe der Massedichteformel $\rho(\vec{r})$

$$\rho = \frac{\Delta\varphi}{4\pi G} = \frac{1}{4\pi G}\left(\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\varphi)\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{g}\right)$$

einsetzen in V für $\rho(\vec{r}\,')$

partielle Integration bzgl $\vec{r}\,'$

$$V = \frac{1}{8\pi} \int d^3r\, \rho(r) \int \frac{dr'\; \vec{\nabla}'\cdot\vec{g}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int d^3r'\, \vec{g}(\vec{r}\,') \cdot \int d^3r\, \rho(\vec{r}) \left[-\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]$$

Ableitung d. Potentials

Randterm verschwinden

$$= -\frac{1}{8\pi G} \int d^3r'\; \vec{g}(\vec{r}\,')\cdot\vec{g}(\vec{r}\,')$$

damit ist $V = V(\vec{g})$

man stellt sich jetzt vor daß Feld ein „Eigenleben" hat
und abstrahiert v. Massenverteilung ρ

<u>a) im freien Raum</u>

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Feld}}}{\mathcal{L}_F} = -\frac{1}{8\pi G} \underbrace{\vec{g}(\vec{r})}_{-\vec{\nabla}\varphi} \cdot \underbrace{\vec{g}(\vec{r})}_{-\vec{\nabla}\varphi} = -\frac{1}{8\pi G} \sum_i (\partial_i \varphi)^2$$

wähle als Feld das Gravitationspotential φ

$$\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,j}} = -\frac{1}{8\pi G} \sum_i 2(\partial_i \varphi) \underbrace{\frac{\partial \varphi_{,i}}{\partial \varphi_{,j}}}_{\delta_{ij}} = -\frac{1}{4\pi G} \partial_j \varphi$$

$$\varphi_{,j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \dot{\varphi}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \varphi_{,j}}$$

$$0 = 0 - \frac{1}{4\pi G} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \partial_j \varphi = -\frac{1}{4\pi G} \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varphi$$

$$\boxed{\Delta \varphi = 0}$$

Gravitationsfeldgleichung im freien Raum

b) Raum mit Masseverteilung

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \underbrace{\mathcal{L}_{F-T}}$$

T – Teilchen mit Masse

$$L_{F-T} = -\sum_n m_n \underbrace{\varphi(\vec{r}_n)}_{\text{potentielle Energie der Teilchen } \vec{r}_n \text{ im Feld } \varphi} \qquad (-V)$$

$$= -\int d^3r \underbrace{\sum_n m_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n)}_{\rho(\vec{r})} \varphi(\vec{r})$$

$$= -\int d^3r\, \rho(\vec{r})\, \varphi(\vec{r})$$

$$\mathcal{L}_{F-T} = -\rho \varphi$$

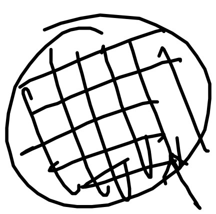
in der Lagrange gl. wird $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \neq 0$, alles andere bleibt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\rho$$

damit erhält man $\boxed{\Delta \varphi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r})}$ Newton-Gravitationsfeldgleichung

partielle Differentialgleichung wenn $\rho(\vec{r})$ vorgegeben ist

auch für ausgedehnte Objekte anwendbar



Planet