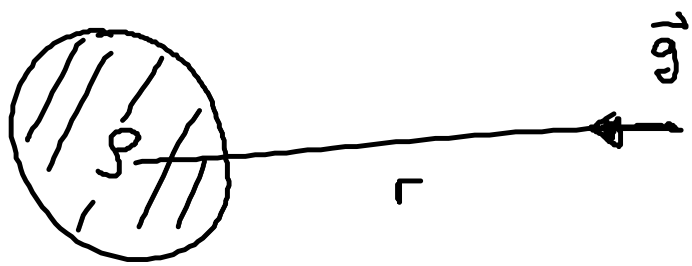
2.5.3 Lösung der Poissongl. für eine homogene Kugel / Stern

- Model: $\rho = \frac{M}{V} = \text{const}$ für $|\vec{r}| \leq R$

  $\rho = 0$ sonst



hängt nur vom Abstand ab

- Lösung: $\Delta \varphi = 4\pi G \rho$ $\quad \Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ in Kugel-koord. nachschlagen

(a) innen

$$\frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \partial_r \varphi_i \right) = 4\pi G \rho = 4\pi G \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3}$$

$$\partial_r \left(r^2 \partial_r \varphi_i \right) = 3 G M \frac{r^2}{R^3} \quad \Big| \int$$

$$r^2 \partial_r \varphi_i = G M \frac{r^3}{R^3} + A$$

A - Integrationskonst.

$$\varphi_i = \frac{GM}{2} \frac{r^2}{R^3} - 3 \frac{A}{r^3} + B$$

$A = 0$, sonst entsteht Divergenz bei $r = 0$, unphysikalisch

(b) außen:

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\varphi_a\right) = 0$$

$$r^2\partial_r\varphi_a = C$$

$$\varphi_a = -\frac{C}{r}$$

- Bedingungen: Stetigkeit der Felder u. Potentiale

(i) $\varphi_a(R) = \varphi_i(R) \Rightarrow -\frac{C}{R} = \frac{GM}{2R} + B$

(ii) $\vec{g}_a(R) = \vec{g}_i(R)$

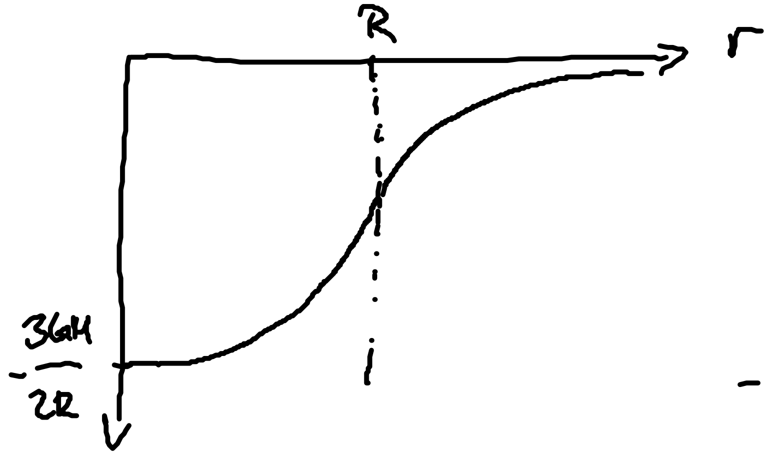
$$\left.\underbrace{\begin{aligned}-\nabla\varphi_a(R) &= -\nabla\varphi_i(R)\\ -\partial_r\varphi_a(R) &= -\partial_r\varphi_i(R)\end{aligned}}_{\vec{e}_r\text{-Komponente in KK}}\right\} \Rightarrow -\frac{C}{R^2} = -\frac{GM}{R^2}$$

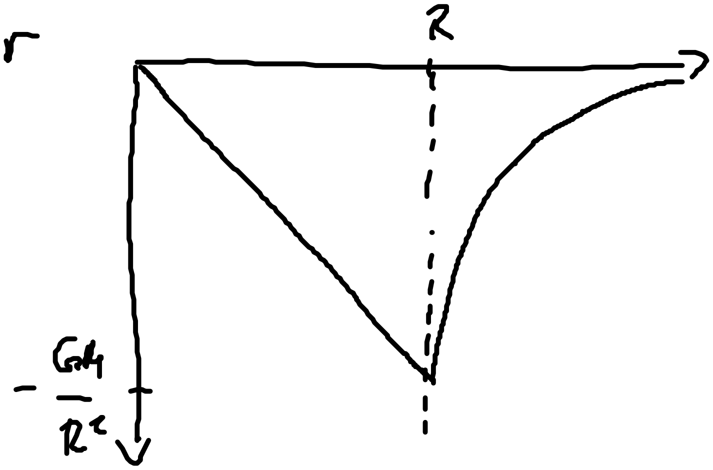
$$\boxed{\begin{aligned}C &= GM\\ B &= -\frac{3GM}{2R}\end{aligned}}$$

- Anschauung:

$$\varphi_a = -\frac{GM}{r} \qquad g_a = -\frac{GM}{r^2}$$

$$\varphi_i = \frac{GM}{2R}\left(-3 + \frac{r^2}{R}\right) \qquad g_i = -\frac{GM}{R^2}\frac{r}{R}$$





- Fazit: Das Potential / Feld einer homogenen massenbeladenen Kugel verhält sich im Außenraum wie das Feld einer Punktmasse.

Aber im Innenraum entsteht ein Interpretations-problem.

$$\underbrace{m \ddot{\vec{r}}_n}_{\text{Stern-teilchen}} = f(\vec{r}_n) = m g(\vec{r}_n) = -\frac{GMm}{R^3} r_n \hat{=} \text{Oszillator-gl.}$$

$\Rightarrow$ jeder MP müßte (unter Reibung) im Zentrum zur Ruhe kommen $\Rightarrow$ Kollaps.

Stern ist stabiles Objekt $\rightarrow$ Gegendruck:

(a) Wärmeenergie (therm. Bewg.) (Sonne)

(b) elektromagn. Energie

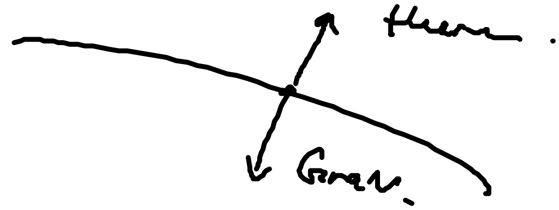
(c) Fermidruck (weißer Zwerg)

• Stern: ideales Gas

$$p = n k T$$

n – Teilchendichte
k = Boltzmannkonst.

$$\frac{F}{A} = n k T$$



$$\sum_n r_n \frac{GMm}{R^3} \frac{1}{4\pi R^2} = \frac{N}{V} k T \qquad \left(V = \frac{4\pi}{3} R^3 \right)$$

$$\frac{1}{\Delta V} \int dV \, r \frac{GMm}{R^2} = 3 N k T \quad | : N \qquad (V = N \Delta V)$$

gehen in KK

$$\frac{1}{V} \int_0^R dr \, r^3 \underbrace{4\pi}_{\text{Winkel-int.}} \frac{GMm}{R^2} = 3 k T$$

$$\frac{1}{V} \frac{4\pi}{4} R^4 \frac{GMm}{R^2} = 3 k T \quad \Rightarrow \quad \frac{GMm}{R} = 4 k T$$

→ Stabilitätskriterium eines Sterns

$$\boxed{kT \sim \frac{GMm}{R}}$$

kann zur wechselseitigen Bestimmung von R, T, M dienen:

$kT \sim 300\,eV \sim 10^6\,K$ unterhält Kernreaktion um Druck aufrecht zuerhalten.

3. Zwangskräfte und Nebenbedingungen

- Nebenbedingung (NB):

  Äußere Einschränkungen eines Systems, die NICHT externen Kräften zugeordnet werden können.

- Freiheitsgrad (FG):

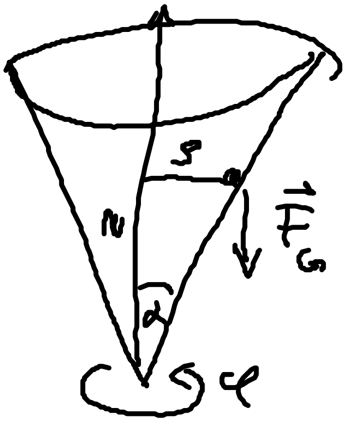
  Zahl der unabh. Parameter, die das System vollständig bestimmen.

  (System mit r NBs und N Teilchen hat $3N - r$ FGs)

- Zwangskräfte (ZK):

  Realisieren die NB.

- Beispiel: Teilchen rollt auf Kegelmantel



$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

- NB: $\tan\alpha = \frac{\rho}{z}$
- FG: $3N - r = 3-1 = \underbrace{2 = f}_{\text{z.B. } r,\ \varphi}$

Die NB übt eine Zwangskraft $\vec{Z}$ aus, die „neben" den eingeprägten externen Kräften wirkt ($\vec{F}_G$)

3.1. Arten von Nebenbedingungen

(a) holonome NB (ganz gesetzlich)

Kann man immer als geschlossene Gl. angeben:

$$\boxed{g_\alpha(\{\vec{r}_j\}, t) = 0 \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} j \in [1, N] \\ \alpha \in [0, r] \end{matrix}}$$

- Beispiel Kegel: $g_1(r) = z\tan\alpha - \rho = 0$
- vollst. Differential für holonome NB:

$$\frac{d}{dt} g_\alpha(\{\vec{r}_j(t)\}, t) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g_\alpha(\{\vec{r}_j\}, t)}{\partial x_{ni}} \frac{d x_{ni}}{dt}$$

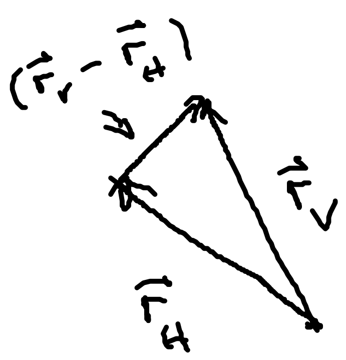
$$+ \frac{\partial g_\alpha(\{\vec r_j\},t)}{\partial t} = 0$$

(b) nicht holonome NB

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Es ex. kein integrierender Faktor in der Differentialschreibweise:}\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} h_{\alpha i}(\{\vec r_j\},t)\,\frac{dx_{ni}}{dt} + h_0(\{\vec r_j\},t) = 0\end{array}}$$

Man benötigt mind. 2 MP.
Sind schwierig, (vergessen wir wieder.)

- Beispiel: Fahrradfahren



(1) konst. Abstand zw. Vorder- und Hinterrad: $\vec r_V - \vec r_H = L$

(2) Hinterrad muß beim Fahren immer in Richtung $\vec r_V - \vec r_H$ zeigen

$$\dot{\vec r}_H \times (\vec r_V - \vec r_H) = 0$$

(c) rheonome NB (fließgesetzlich)

$$\boxed{\text{Die NB sind zeitabhängig}}$$

· Beispiel: Pendel mit veränderlicher Länge

$$g_1(t) = \ell^2(t) - |\vec{r}|^2(t) = 0$$

(d) skleronome NB (starrgesetzlich)

$$\boxed{\text{Die NB sind zeitUNabhängig.}}$$

Wie lösen wir Probleme mit NB?

$\longrightarrow$ 2 Varianten

(1) Lagrangegl. I. Art (modifizierte Newtongl.)

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_g + \vec{Z}$$

ZK $\vec{Z}$ wirkt zusätzlich zur Grav.kraft und hält Teilchen auf Kegel

$$m\ddot{x}_i = Z_i - mg\vec{e}_i\,\delta_{iz}$$

· Aufgabe: Bestimmen der Z_i aus den NB

(2) Lagrangegl. II. Art (generalisierte Koord., die die NB automatisch beinhaltet)

$$L(x_i, \dot{x}_i) = \sum_i \frac{m}{2}\dot{x}_i^2 - mgz \quad , \quad \rho - z\tan\alpha = 0$$

NB verwenden um eine Koord. aus L zu

eleminieren. Am besten in problem angepaßten Koordinaten.

3.2 Einbau von NB in die Bewegungsgl.

- Ausgangspunkt:

(a) L. Fkt ohne NB:

$$L = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{m_n}{2} \dot{\vec{r}}_n^{\,2} - V(x_{ni})$$

(b) NB: $\quad g_\alpha(\{x_{ni}\}, t) = 0$

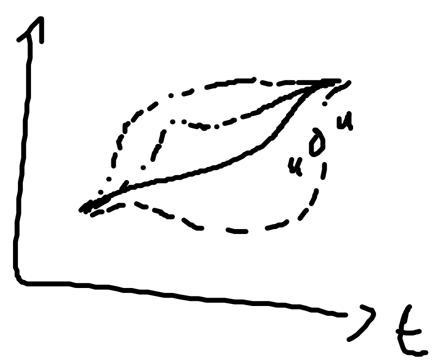
Die x_{ni} können karth. oder andere Koord.

3.2.1 Zwangskräfte in den Newtongl.

- Hamiltonprinzip: kleinster Zwang $\hat{=}$ S = extremal

(i) $$0 = \int dt \sum_{ni}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial x_{ni}^{0}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ni}^{0}} \right) \delta x_{ni}$$

(ii) $$0 = g_\alpha(\{x_{ni}\})$$



- Ziel: δx_{ni} linear unabhängig machen (ZB einbauen)

$\longrightarrow$ g_α um die wirkl. BK entwickeln und in (i) einsetzen

$$g_\alpha(\{x_{ni}\}) \approx \underbrace{g_\alpha(\{x_{ni}^0\})}_{=0,\ \text{da die richtige BK}} + \sum_{ni}^{3N} \frac{\partial}{\partial x_{ni}^0} g_\alpha(x_{ni}^0)\,\delta x_{ni} + \ldots = 0$$

Jetzt über Zeit integrieren, mal λ_α nehmen und $\sum_\alpha$ addieren (Methode der Lagrangemultiplikatoren)

$$\Rightarrow (i) \quad 0 = \int dt \sum_{ni}^{3N} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial x_{ni}^0} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ni}^0} + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial x_{ni}^0} g_\alpha(x_{ni}^0) \right)}_{\overset{!}{=}\, 0} \delta x_{ni}$$

NB g_α ins Ham. prinzip eingebaut:

wir nutzen $L = T - V = \sum_{ni} \frac{m_i}{2} \dot{x}_{ni}^2$ und in karth. Koord. folgt:

$$m_n \ddot{x}_{ni} = \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial x_{ni}}}_{\overset{!}{=}\, F_{ni}} + \underbrace{\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial x_{ni}} g_\alpha(\{x_{ni}\})}_{Z_{ni}}$$

$$\overset{!}{=} F_{ni} + Z_{ni}$$

→ eingeprägte ext. Potentialkraft $F_{ui} = -\frac{\partial V}{\partial x_{ui}}$

→ Zwangskraft: $\vec{Z} = \sum_\alpha \lambda_\alpha \vec{\nabla} g_\alpha(\{\vec{r}\})$

$\boxed{\text{Euler-Lagrange-Gl. I. Art}}$

- Interpretation: $\vec{Z} \perp$ auf den Hyperflächen von g_α

⇒ $\vec{Z}$ hat keine Komponente in Richtung der Fläche

⇒ $\vec{Z}$ steht stattdessen $\perp$ auf der Fläche, also parallel zu $\vec{Z} \parallel \vec{\nabla} g$.

Allgem. Vorgehen bei LGl I

(1) Formulieren der NB,
Koord. wählen

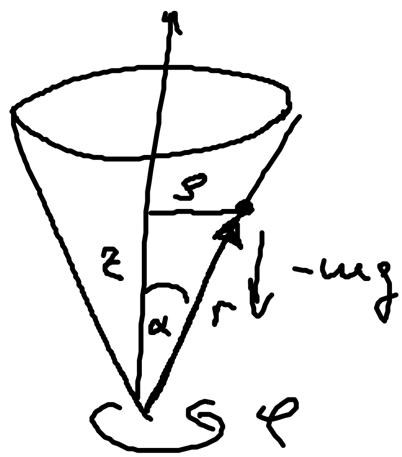
(2) Lagrangegl. I. Art aufstelle
ZK durch $\vec{Z} = \sum_\alpha \lambda_\alpha \nabla g_\alpha(\vec{r}, t)$ bestimme

(3) Lagrangemultiplikatore λ_α eliminiere

Dazu jede NB g_α zweimal total nach der Zeit ableiten mit Bewegungsgl. eleminiere und aus resultierende Gl. λ_α bestimme

(4) λ_α in LAG I einsetzen, lösen Gleichung, da $\vec{Z}$ jetzt bekannt.

- Beispiel:



(1) NB: Kegelgl: $g_1 = \rho - z\tan\alpha = 0$

verwenden Zyl. koord: (ρ, φ, z)

(2) LAG I aufstellen: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{Z}$

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\vec{e}_z + \lambda_1 \vec{\nabla}_{zk} g_1(r)$$

$$\boxed{\vec{\nabla}_{zk} = \vec{e}_\rho \partial_\rho + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\partial_\varphi + \vec{e}_z \partial_z}$$

in Komponenten:

(i) $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = 0 + \lambda_1 \cdot 1$ $\quad \Rightarrow \quad Z_\rho = \lambda_1$

(ii) $m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = 0 + \lambda_1 \cdot 0$ $\quad Z_\varphi = 0$

(iii) $m\ddot{z} = -mg - \lambda_1 \tan\alpha$ $\quad Z_z = -\lambda_1 \tan\alpha$

(3) λ_α eliminieren

$$\frac{d^2}{dt^2} g_1(r) \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\rho - z\tan\alpha) = \ddot{\rho} - \ddot{z}\tan\alpha \overset{!}{=}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\rho} = \ddot{z}\tan\alpha}$$ in Gl. (i) einsetzen

(i) $m\ddot{\rho} = m\rho\dot{\varphi}^2 + \lambda_1$

$m(\ddot{z}\tan\alpha) = m\rho\dot{\varphi}^2 + \lambda_1$ jetzt $\ddot{z}$ aus Gl. (iii) einsetzen

(iii) $\ddot{z} = -g - \frac{\lambda_1}{m}\tan\alpha$

(i) $m\tan\alpha\left(-g - \frac{\lambda_1}{m}\tan\alpha\right) = m\rho\dot{\varphi}^2 + \lambda_1$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\left(\frac{m\rho\dot{\varphi}^2 + mg\tan\alpha}{(1+\tan^2\alpha)}\right)$$ Damit können wir die ZK bestimmen.

(4) Lsg. der Bewegungsgl.

(i) $$(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = -\left(\frac{g\tan\alpha + \rho\dot{\varphi}^2}{(1+\tan^2\alpha)}\right)$$

(ii) $$(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = 0$$

(iii) $$\ddot{z} = -g + \frac{\rho\dot{\varphi}^2 + g\tan\alpha}{(1+\tan^2\alpha)} \cdot \tan\alpha$$

Alternativdarstellung über $\rho = r \cdot \sin\alpha$
in (i)-(iii) einsetzen

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{r} - \sin^2\alpha\, r\dot{\varphi}^2 = -g}$$