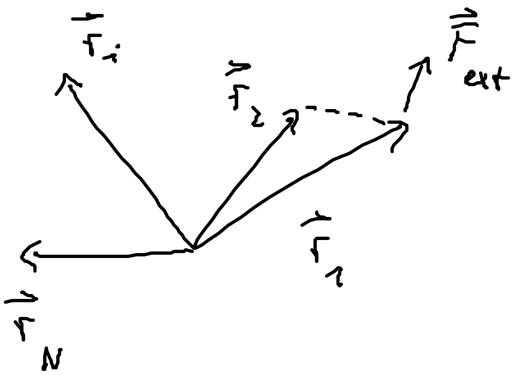
VII Vielteilchensysteme

1. Grundlagen der Beschreibung

1.1. Newtongleichungen

Vielteilchensystem von N wechselwirkenden Teilchen ---



im externen Kraftfeld → (von außen)

Kraft auf das i-te Teilchen:

$$\vec F_i = \vec F_{ext}(\vec r_i, t) + \vec F_{int}(\vec r_i)$$

F_{ext}: externe / äußere Kraft (entfernte Massen die nicht zum System gehören)
kann zeitabhängig sein (t)

F_{int}: innere Kräfte zwischen Teilchen, Paarwechselwirkung
soll nur von den Koordinaten der Teilchen abhängen $(\vec r_i)$

$$\vec F_{int}(\vec r_i) = \sum_{j \neq i} \vec F_{j \to i}(\vec r_i, \vec r_j)$$ interne Kraft auf i-te Teilchen

Summe alle Teilchen j die mit i wechselwirken

Kraft des j-ten Teilchens auf i-te Teilchen

typischerweise hängt diese Kraft nur von $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ ab,

z.B. Coulomb, Gravitation, magn. Kraft

Erfahrungstatsache

Newtongleichung f. i-te Teilchen:

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{r}}_i(t)\right) = \vec{F}_{ext}(\vec{r}_i, t) + \sum_{j \neq i}^{N} \vec{F}_{j \to i}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

m_i: i-te Masse

Wissen: actio = reactio $\vec{F}_{j \to i} = - \vec{F}_{i \to j}$

konkretes Bsp: Gravitationskraft

1.2. Bilanzen und Erhaltungssätze

gehen jetzt verschiedene Größen durch

a) Schwerpunkt eines VTS

$$\vec{R}(t) = \underbrace{\frac{1}{M}}_{\text{Gesamtmasse}} \sum_i \underbrace{m_i \vec{r}_i(t)}_{\text{gewichtete Ortsverteilung / Masseverteilung.}}$$

$$M = \sum_i m_i$$

Newtongl. über i summieren

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_{ext}(\vec{r}_i, t) + \underbrace{\sum_{\substack{ij \\ (j \neq i)}} \vec{F}_{j \to i}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}_{* = 0}$$

$$* = \sum_{ij} \vec{F}_{j \to i} \underset{\text{actio = reactio}}{=} - \sum_{ij} \vec{F}_{i \to j} \underset{\text{Indices tauschen}}{=} - \sum_{ij} \vec{F}_{j \to i} \Longrightarrow \underbrace{* = -*}_{* = 0}$$

Summe über internen Kräfte verschwindet

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(M \dot{\vec{R}}(t)\right) = \sum_i \vec{F}_{ext}(\vec{r}_i, t) \equiv \vec{F}_{ext}(t)}$$

Schwerpunkt Bilanz

(allg.: $\frac{d}{dt} X = Y$)

- Schwerpunkt bewegt sich so als ob die Summe aller externen Kräfte direkt an ihm angreift. Die Masse ist die Gesamtmasse.

- wenn $\vec{F}_{ext} = 0$ so ist $\dot{\vec{R}} = \vec{v}_0$ = konstant eine Erhaltungsgröße

- $\hat{=}$ Rechtfertigung d. Massepunktmodell

b) Impulsbilanz   Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i(t)$ als $\sum_i$ über Einzelimpulse

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{P}(t) = \vec{F}_{ext}(t)}$$

„Impulsbilanz"

wenn $\vec{F}_{ext} = 0$, so $\vec{P} = \vec{P}_0$ = konstant

c) Drehimpulsbilanz   Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$

($\sum_i$ Einzeldrehimpulse)

Drehimpulsbilanz eines einzelnen Teilchens

$$\frac{d}{dt}\sum_{\underline{i}} m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_{\underline{i}} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext}(\vec{r}_i, t) + \underbrace{\sum_{\underline{j,i}} \vec{r}_i \times \vec{F}_{j \to i}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}_{* = 0}$$

über i summiert

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{L}(t) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext}(\vec{r}_i, t) \equiv \vec{M}_{ext}(t)}$$

„Drehimpulsbilanz", wenn $\vec{M}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_0 = \text{konstant}$

$$* = \frac{1}{2}\sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{F}_{j \to i} + \frac{1}{2}\sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{F}_{j \to i}$$

actio = reactio

$$= \quad - \text{"} - \quad - \frac{1}{2}\sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{F}_{i \to j}$$

Indextausch $(i \to j)$

$$= \frac{1}{2}\sum_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{j \to i}$$

weil $\vec{F}_{j \to i} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j$ muß Kreuzprodukt verschwinden

d) <u>Energiebilanz</u> Energie eines VTS: $E = \underset{\text{kin. E}}{T} + \underset{\text{potentielle E.}}{V} (\text{int} + \text{ext})$

Bilanz eines MP:

$$\underline{\frac{d}{dt}}\sum_i \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} = \underline{\sum_i} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{ext}(\vec{r}_i, t) + \underbrace{\sum_{\underline{ji}} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{j \to i}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}$$

$* \neq 0$

Summe über alle „i"   beide Kräfte d. Potential ausdrückbar

$$\frac{d}{dt} T = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \left(-\vec{\nabla}_i V_{ext}(\vec{r}_i, t) \right) + *$$

$$\sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \sum_i - \left(\frac{d}{dt} V_{ext}(\vec{r}_i, t) - \frac{\partial}{\partial t} V_{ext}(\vec{r}_i, t) \right) + *$$

kinetische Gesamtenergie

$$\frac{d}{dt}\left(T + V_{ext} \right) = \frac{\partial V_{ext}}{\partial t} + *$$

$$* = \text{analog zu (c)} = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) \cdot \vec{F}_{j \to i} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{d}{dt} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \left(-\vec{\nabla}_{\vec{r}_i - \vec{r}_j} V_{int}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{ij} V_{int}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\vec r}_i^{\,2}}_{\text{Kinetisch}} + \underbrace{\sum_i V_{ext}(\vec r_i, t)}_{\text{potentiell v. außen}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{ij} V_{int}(\vec r_i - \vec r_j)}_{\text{potentiell F. der WW}}\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\sum_i V_{ext}(\vec r_i, t)}$$

„Energiebilanz ein VTS" (alle ind Klammer $\hat{=}$ E)

wenn V_{ext} nicht explizit v. Zeit abhängt so

$E = E_0 = \text{Konst}$

<u>1.3. kurzer Ausflug</u>: Noethertheorem (Emmy Noether)

„Jede Symmetrie gibt einen Erhaltungssatz."

Man habe eine Transformation $(q_i, \dot q_i, t)$ in $L(q_i, \dot q_i, t)$

die entweder <u>L nicht ändert</u> oder zu einem <u>L' mit derselben Bewegungsgleichung führt</u> (Add. v. $\frac{d}{dt}R$).

Diese Trafos heißen Symmetrietransformationen.

<u>Noethertheorem</u>:

Jede infinitesimale Symmetrietrafo mit $L - L' = 0$ (oder $\frac{d}{dt}R$) ist mit ein Erhaltungssatz verknüpft.

Bsp: $q_i, \dot{q}_i, t \longrightarrow q_i, \dot{q}_i, t + \underline{\underline{\delta t}}$

infinitesimale
Trafo

inf. Symmetrie trafo erst, wenn $L = L'$

$L = T + V$ $\qquad$ $L = L' \Rightarrow$ E-Erhaltung.

hängt nicht von Zeit ab ($\dot{q}$)

$V(q, \cancel{t})$

wenn V nicht von t abhängt so ist das bei $t \to t + \delta t$

Sprechweise: „Symmetrie von L bzgl. $t \to t + \delta t$"

viele Symmetrien:

$t \to t + \delta t$ „Homogenität der Zeit" $\longrightarrow$ Energieerhaltung

$\vec{r} \to \vec{r} + \delta \vec{a}$ „Homogenität d. Raums" $\longrightarrow$ Impulserhaltung

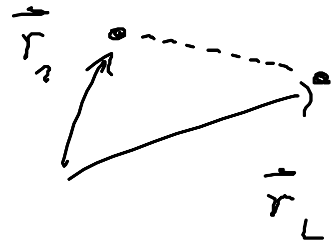
$\vec{r} \to \vec{r} + \delta \vec{\phi} \times \vec{r}$ „Isotropie d. Raums" $\longrightarrow$ Drehimpulserhaltung

$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$

Noethertheorem als allgemeinste Formulierung der Erhaltungssätze.

2. Beispiele f. Zweikörperprobleme

a) Keplerproblem



$$V_{ext} = 0$$

$$V_{int} = -\frac{G m_1 m_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|}$$

E ist erhalten weil $V_{ext} = 0$, $\frac{\partial V_{ext}}{\partial t} = 0$

$$E = \frac{m_1}{2}\dot{\vec r}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec r}_2^{\,2} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{int}(\vec r_i - \vec r_j)}$$

$i = j$ verboten

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(-\frac{G m_1 m_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|} - \frac{G m_1 m_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|}\right)}$$

$$-\frac{G m_1 m_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|} \;\hat{=}\; \text{Gravitationsenergie (potentielle)}$$

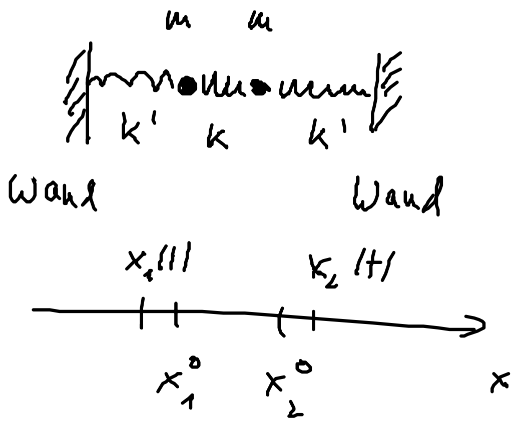
✓

– Gesamtimpuls ist erhalten $\vec P = m_1 \dot{\vec r}_1 + m_2 \dot{\vec r}_2$

ebenso Drehimpuls

b) Zwei gekoppelte Pendel

Ruhe



Koordinate d. MP $x_1(t)$, $x_2(t)$

Ruhelage x_1^0, x_2^0

Federkonstante k, k'

Newtongleichungen

$$m\ddot{x}_1 = \vec{F}_{ext}(x_1) + \vec{F}_{2\to 1}$$

$$= -k'(x_1 - x_1^0) - k\left[(x_1 - x_1^0) - (x_2 - x_2^0)\right]$$

Wand als externe Kraft

gesamte „Verstauchung" der Feder wird durch x_1 und x_2 bestimmt

$$m \frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_1^\circ) = -k'(x_1 - x_1^\circ) - k\left[(x_1 - x_1^\circ) - (x_2 - x_2^\circ)\right]$$

Konstant

Zweiter Oszillator

actio = reactio

$$m \frac{d^2}{dt^2}(x_2 - x_2^\circ) = -k'(x_2 - x_2^\circ) + k\left[(x_1 - x_1^\circ) - (x_2 - x_2^\circ)\right]$$

letzte Wand (rechte)

2 gekoppelte Dgl., können wegen Linearität gelöst werden

Koordinaten: $\delta_1 = x_1 - x_1^\circ \,, \quad \delta_2 = x_2 - x_2^\circ$

$$m\ddot{\delta}_1 = -k(\delta_1 - \delta_2) - k'\delta_1 \qquad (1)$$

$$m\ddot{\delta}_2 = +k(\delta_1 - \delta_2) - k'\delta_2 \qquad (2)$$

neue Koordinaten

$$\delta_+ = \delta_1 + \delta_2 \,, \qquad \delta_- = \delta_1 - \delta_2$$

Summe + Differenz bilden der beiden Gleichungen (1), (2)

$$m\,\delta_+ = -k'\,\delta_+$$ (Schwerpunktsbilanz)

$$m\,\ddot{\delta}_- = -(2k+k')\,\delta_-$$ Relativkoordinate

man erkennt, daß das Problem auf
2 ungekoppelte Oszillatoren reduziert ist

$$\left.\begin{array}{l} \omega_+^2 = \dfrac{k}{m} \Rightarrow \ddot{\delta}_+ = -\omega_+^2\,\delta_+ \\[2ex] \omega_-^2 = \dfrac{2k+k'}{m} \rightarrow \ddot{\delta}_- = -\omega_-\,\delta_- \end{array}\right\}$$ kann auch direkt bestimmt

→ die neuen Oszillatoren $\pm$ werden oft kollektive Anregungen,
Quasiteilchen, Normalmoden bezeichnet
(enthält Eigenschaft beider Oszillatoren)