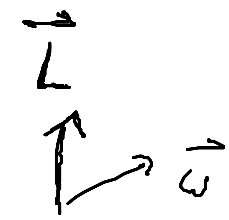
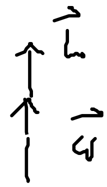
4.1.3. Hauptachsentransformation der Trägheitsmatrix

i.a. gilt: $L_k = \sum_e \Theta_{ke}\, \omega_e$ d.h. $\vec{\omega} \nparallel \vec{L}$



Frage: Kann man die Achse von Σ' so legen, daß bei einer Drehung um $\vec{\omega}$ auch $\vec{L}$ entlang dieser Achse liegt?

Also $\vec{\omega} \parallel \vec{L}$:



In diesem Falle wäre $L_k = \Theta\, \omega_{\parallel k}$

parallel f. diese spezielle Achsenwahl

- um aber jeden beliebigen Zusammenhang $\vec{L} = \vec{L}(\vec{\omega})$ darzustellen braucht man 3 Achsen (vollständiges System)
- findet man diese so braucht man nur $3\ \Theta$'s mit $\Theta_\kappa \big|_{\kappa = 1,2,3}$ im Gegensatz zur vollständigen Trägheitsmatrix Θ_{ke} (9 Elemente)
- wir suchen jetzt ausgez. Achsen bei denen $\vec{\omega} \parallel \vec{L}$

$$\underline{\underline{\vec{L}}} = \underset{\text{Matrix}}{\hat{\Theta}}\, \vec{\omega} \overset{!}{=} \underset{\text{Zahl}}{\Theta}\, \underline{\underline{\vec{\omega}}}$$

Gleichung f. die Bestimmung dieser speziellen Achse $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\parallel}$

(Forderung $\stackrel{!}{=}$ muß erfüllt sein)

= Eigenwertgleichung einer Matrix → Eigenwerte : Θ

Eigenvektoren : $\vec{\omega}_{\parallel}$ } gesuchte Größen

$$(\hat{\Theta} - \Theta \underline{\underline{1}}) \vec{\omega}_{\parallel} = 0 \qquad 3 \times 3 \text{ Gleichg für } \omega_{\parallel i}$$

$$\begin{pmatrix} \Theta_{11} - \Theta & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} - \Theta & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} - \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{\parallel 1} \\ \omega_{\parallel 2} \\ \omega_{\parallel 3} \end{pmatrix} = 0$$

homogenes Gleichungssystem f. $\omega_{\parallel i}$

Die Θ werden die Hauptträgheitsmomente genannt.

Um eine nicht triviale ($\omega_{\parallel i} \neq 0$) zu erhalten muß die Koeffizientendeterminante verschwinden → Gleichg. 3 Ordnung.

→ hat i.a. 3 Lösungen f. Θ → Θ_α mit $\alpha = 1, 2, 3$

→ es gibt auch 3 Eigenvektoren : $\vec{\omega}_{\parallel}^{\alpha}$ mit $\alpha = 1, 2, 3$

Die Eigenwerte einer reellen symmetrischen Matrix sind reell
und die Eigenvektoren sind zueinander orthogonal $\vec{\omega}_{\parallel}^{\alpha} \cdot \vec{\omega}_{\parallel}^{\beta} = \delta_{\alpha\beta}$.

→ die Eigenvektoren können normiert werden und
spannen dann ein rechtwinkliges Koordinatensystem auf
dieses KS wird Hauptachsensystem genannt. $(\Sigma'_{\parallel})$

Die Umrechnung von beliebigem Σ' auf $\Sigma'_{\parallel}$ wird
Hauptachsentransformation genannt.

<u>a) Drehimpuls im Hauptachsensystem</u>

in beliebigem Σ' gilt $\vec{L} = \sum_{\ell k} \Theta_{k\ell}\, \omega_{\ell}\, \vec{e}_{k}'$

in $\Sigma'_{\parallel}$ gilt: $\vec{L} = \sum_{\alpha} \Theta_{\alpha} \vec{\omega}_{\parallel}^{\alpha} = \sum_{\alpha} \Theta_{\alpha}\, \omega_{\parallel}^{\alpha} \underbrace{\frac{\vec{\omega}_{\parallel}^{\alpha}}{\omega_{\parallel}^{\alpha}}} = \sum_{\alpha} \Theta_{\alpha} \omega_{\parallel}^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}'$

Superposition aller 3 Richtg.
im Hauptachsensystem

$\omega_{\parallel}^{\alpha}$ ist Normierung
d. Einheitsvektors $\vec{e}_{\alpha}'$

formal $\vec{L} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$

$\parallel$ weglassen,
denn griechischer
Indizes ist

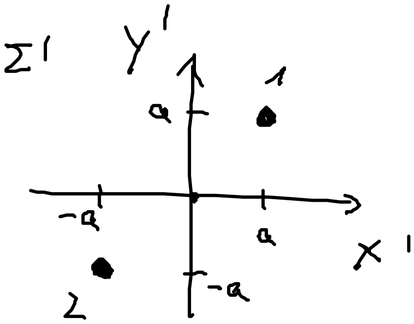
immer Hauptachsensystem gemeint

Zusammenhang zwischen

$\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ im Hauptachsensystem

nur noch 3 Hauptträgheitsmomente gebraucht

<u>Beispiel</u>



$\vec{r}_1{}' = (a, a, 0)$

$\vec{r}_2{}' = (-a, -a, 0)$

$m_1 = m_2 = m$

$$\Theta_{kl} \text{ in } \Sigma' = \begin{pmatrix} \sum_i m_i \left(y'^2(i) + z'^2(i)\right) & -\sum_i m_i\, x'(i)\, y'(i) & -\sum_i m_i\, x(i)\, z(i) \\ \cdot & \sum_i m_i\left(x'^2(i) + z'^2(i)\right) & -\sum_i m_i\, y'(i)\, z'(i) \\ \cdot & \cdot & \sum_i m_i \left(x'^2(i) + y'^2(i)\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2ma^2 & -2ma^2 & 0 \\ -2ma^2 & 2ma^2 & 0 \\ 0 & & 4ma^2 \end{pmatrix}$$

Lösung der Eigenwertgleichung f. die Matrix Θ_{kl} um Θ_α zu finden

$$\begin{vmatrix} 2ma^2 - \Theta_\alpha & -2ma^2 & 0 \\ -2ma^2 & 2ma^2 - \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 4ma^2 - \Theta \end{vmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$(4ma^2 - \Theta_\alpha) \cdot \left[(2ma^2 - \Theta_\alpha)^2 - 4m^2a^4 \right] \overset{!}{=} 0$$

$$\boxed{4ma^2 = \Theta_1}$$

$$\Theta_\alpha^2 - 4ma^2\,\Theta_\alpha \quad \cancel{4m^2a^4} - \cancel{4m^2a^4} = 0$$

$$\boxed{\Theta_2 = 4ma^2} \qquad \boxed{\Theta_3 = 0}$$

3 Lösungen die die Hauptträgheitsmomente bestimmen:

$$\Theta_1 = \Theta_2 = 4ma^2, \qquad \Theta_3 = 0$$

Hauptachsensystem:

$$\Theta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 4ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie liegen die Achsen von Σ'_{ll} :

1. und 2. Achse $\Theta_{1/2} = 4ma^2$:

Bestimmungsgl. f. $\vec{\omega}^\alpha$:

$$\begin{pmatrix} 2ma^2 - \Theta_{1/2} & -2ma^2 & 0 \\ -2ma^2 & 2ma^2 - \Theta_{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 4ma^2 - \Theta_{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^{1/2} \\ \omega_2^{1/2} \\ \omega_3^{1/2} \end{pmatrix} = 0$$

↑ Kompt. von $\vec{\omega}_\alpha$ in Σ'

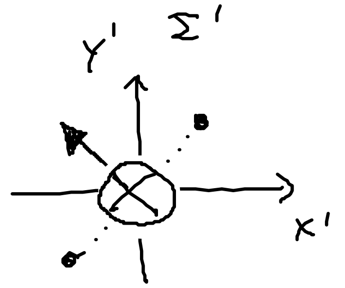
$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2ma^2 & -2ma^2 & 0 \\ -2ma^2 & -2ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^{1/2} \\ \omega_2^{1/2} \\ \omega_3^{1/2} \end{pmatrix} = 0}$$

$\omega_1^{1/2} = -\omega_2^{1/2}$ (1. Zeile), 2. Zeile: Keine neue Info

3. Zeile: $\omega_3^{1/2}$ unbestimmt

$\omega_3^{1/2} \cdot 0 = 0$

neuer Basisvektor $\vec{e}_{\alpha=1}$



$\omega_3^1 = 0$ wähle

$\omega_1^1 = -\omega_2^1$

$\omega_3^2 =$ konst

$\omega_1^2 = -\omega_2^2 = 0$

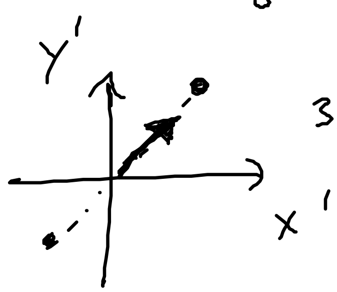
3. Achse $\Theta_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2ma^2 & -2ma^2 & 0 \\ -2ma^2 & 2ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4ma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \\ \omega_3^3 \end{pmatrix} = 0$$

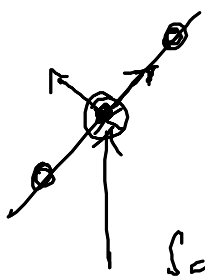
1. Zeile: $\omega_1^3 = \omega_2^3$

2. Zeile: – " –

3. Zeile: $4ma^2 \omega_3^3 = 0 \rightarrow \omega_3^3 = 0$



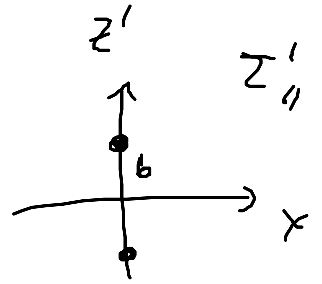
3. Hauptachse richtig.



$\Sigma'_{||}$

Schwerpkt.

$\longrightarrow$



$\Sigma'_{||}$

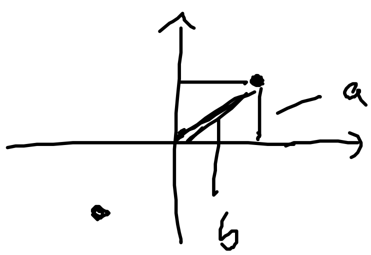
$\vec{r}_1 = (0, b, 0)$

$\vec{r}_2 = (0, -b, 0)$

$$\Theta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 2mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vgl.

$$\Theta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 4ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$a^2 + a^2 = b^2$$

$$2a^2 = b^2$$

b) kinetische Energie im Hauptachsensystem

$$T = \frac{1}{2} \sum_{lk} \underbrace{\theta_{lk}\, \omega_l\, \omega_k}_{L_l} = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_l L_l\, \omega_l}_{\text{Skalarprodukt}} = \frac{1}{2}\, \vec{L} \cdot \vec{\omega}$$

Σ' beliebig

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_\alpha L_\alpha \vec{e}_\alpha}_{\text{Hauptachsen-system}} \cdot \sum_\beta \omega_\beta \vec{e}_\beta = \frac{1}{2} \sum_\alpha \Theta_\alpha \omega_\alpha \underbrace{\vec{e}_\alpha \cdot \sum \omega_\beta \vec{e}_\beta}_{\delta_{\alpha\beta}}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha \Theta_\alpha \, \omega_\alpha^2$$

kinetische Energie in Hauptachsensystem

wieder nur 3 Zahlen nötig statt 9

<u>Begriff</u> Trägheitsellipsoid

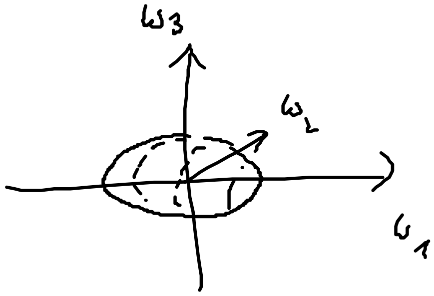
$$T = \frac{1}{2} \left(\Theta_1 \omega_1^2 + \Theta_2 \omega_2^2 + \Theta_3 \omega_3^2 \right)$$

$$1 = \left(\frac{\omega_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\omega_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_3}{a_3}\right)^3$$

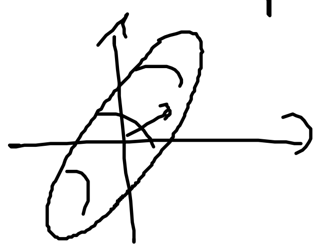
mit $a_i^2 = \frac{2T}{\Theta_1}$

geometrisches Gebilde in

KS mit $\vec{\omega}$ Achse



Trägheits - Ellipsoid



Hauptachsentrafo dreht das Ellipsoid in die Hauptachsrichtg.