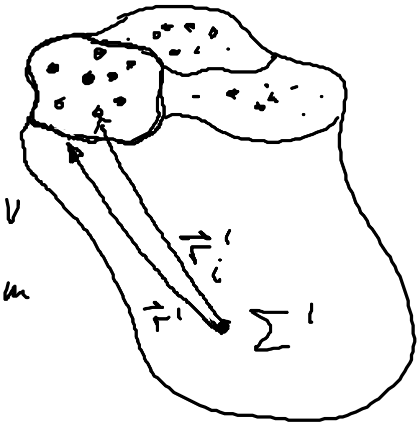
## 4.1.4. Berechnung von Trägheitstensoren dichter Körper

$\Theta_{ke}$ für reale, ausgedehnte Körper (dichtliegende Massepunkte)

dichtliegende Massepunkte im Volumen $\Delta V$ mit Masse $\Delta m$




$\vec{r}\,'$ „sammelt" alle $\vec{r}_i\,'$ in einer Umgebung $\Delta V(\vec{r}\,')$ mit $\Delta m(\vec{r}\,')$ auf

$\hat{=}$ Grobrasterung d. Raums

(„coarse graining")

Idee: Einführung einer Massendichte $\rho_m(\vec{r}\,') = \dfrac{\Delta m(\vec{r}\,')}{\Delta V(\vec{r}\,')}$.

Übergang von $\vec{r}_i \to \vec{r}\,'$

diskrete zu kontinuierlicher Beschreibung

Gesamtmasse:

$$M = \sum_i m_i = \sum_{\vec{r}\,'} \overbrace{\sum_{i(\vec{r}\,')} m_i}^{\text{Masse in Umgebg. } \Delta V \text{ von } \vec{r}\,'} = \sum_{\vec{r}\,'} \Delta m(\vec{r}\,')$$

alle Massepkte d. Körpers

Summe über alle $\vec{r}\,'$

Summe über alle MP „$i$" in Umgebung v. $\vec{r}\,'$

$$= \sum_{\{\vec{r}\,'\}} \Delta m(\vec{r}\,') \underbrace{\frac{\Delta V(\vec{r}\,')}{\Delta V(\vec{r}\,')}}_{1}$$

$$= \sum_{\{\vec{r}\,'\}} \underbrace{\frac{\Delta m(\vec{r}\,')}{\Delta V(\vec{r}\,')}}_{\substack{\text{Massendichte} \\ \text{am Ort } \vec{r}\,'}} \Delta V(\vec{r}\,') \xrightarrow[\Delta V \to 0]{} \int dV' \, \rho_M(\vec{r}\,')$$

$$\rho_M(\vec{r}\,') = \frac{dm(\vec{r}\,')}{dV(\vec{r}\,')}$$

$$M = \int dV' \rho_M(\vec{r}\,') \qquad dV' = d^3r'$$

Def. d. Gesamtmasse über Massedichte.

Regel f. Grobrasterung: $\sum_i m_i f(i) \longrightarrow \int d^3r' \, \rho_M(\vec r') f(\vec r')$

Funktion d. i-ten Massepkts

Anwendung auf Trägheitstensor:

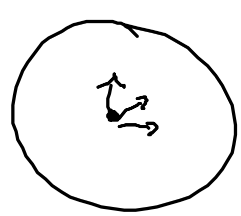
$$\Theta_{kl} = \sum_i \left( \sum_m x_m'^2(i)\, \delta_{kl} - x_k'(i)\, x_l'(i) \right)$$ diskret (Massenpunkte)

$$\longrightarrow \int d^3r' \, \rho_M(\vec r') \left( \vec r'^2 \delta_{kl} - x_k' x_l' \right)$$

$$\vec r' = (x', y', z') = (x_1', x_2', x_3')$$

Beispiel

Vollkugel



$\Sigma'$ im Schwerpunkt

$\Sigma'_{\|}$ ist sofort Hauptachsensystem

und nur durch 1 Zahl

<u>Konstante Massedichte:</u>

$$\rho_M(\vec{r}\,') = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} = \frac{\text{Gesamtmasse}}{\text{Volumen}}$$

R: Kugelradius →

$$\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta_{33}$$

$$\Theta_{xx} = \Theta_{yy} = \Theta_{zz}$$

gegeben (Symmetrie)

$$\Theta_{kl} = \int d^3r'\,\rho_M(\vec{r}\,')\left(\vec{r}\,'^2\,\delta_{kl} - x_k' x_l\right)$$

$$\Theta_{zz} = \rho_M\left(\int d^3r'\,r'^2 - \int d^3r'\,z'^2\right)$$

↑ damit alle bestimmt

Kugelkoordinaten

$$\int d^3r' \to \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} d\vartheta' \sin\vartheta' \int_0^R dr'\,\underline{\underline{r'^2}}$$

$$= \rho_M\left(4\pi\,\frac{R^5}{5} - 2\pi \int_0^{\pi} d\vartheta' \sin\vartheta' \int_0^R dr'\,r'^4 \cos^2\vartheta'\right) \qquad z' = r'\cos\vartheta'$$

$\measuredangle$ Integral      $\varphi$-Integral

$$\boxed{\cos\vartheta = x \quad \text{Substitution}}$$

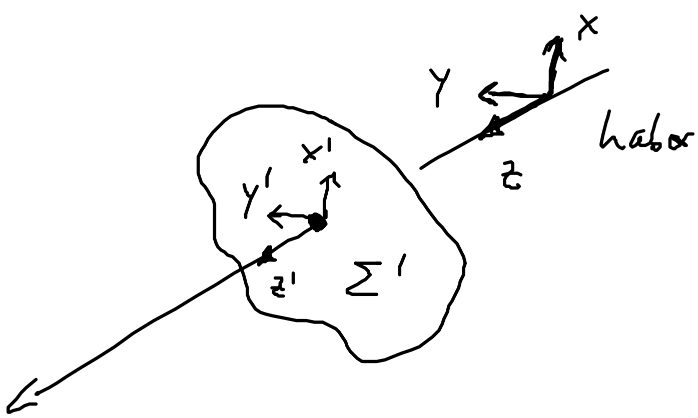
$$= \rho_M\left(4\pi\,\frac{R^5}{5} - 2\pi\,\frac{R^5}{5}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right)$$

$$= \rho_M\left(\frac{12\pi}{15} - \frac{4\pi}{15}\right)R^5$$

$$= \rho_M\,\frac{8\pi}{15}\,R^5 = \frac{2}{5}\,M R^2$$

## 4.1.5 Rotation um feststehende Achse

bisher $\vec{\omega}(t)$ beliebig, jetzt $\vec{\omega}$ festlegen




Frage: Vereinfacht sich $T_{kin}$, $\vec{L}$ ?

$\vec{\omega}$ fest Raum $\hat{=}$ Drehg. um feste Achse

Sinnvolle Def. v. $T$, $\vec{L}$ über $\Theta_{ke}$ war wenn $\underline{\sum_i m_i \vec{r}_i{}'} = 0$

gilt wenn: a) $\Sigma'$ im Schwerpunkt

b) wenn kein Translation $\dot{\vec{r}}_0 = 0$

$\downarrow$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ke} \Theta_{ke}\, \omega_k\, \omega_e \Big|_{\omega_k = \delta_{kz}\, \omega_{z'}} = \frac{1}{2} \sum_{ke} \Theta_{ke}\, \delta_{kz}\omega_z\, \delta_{ez}\omega_z = \frac{1}{2}\Theta_{zz}\,\omega_z^2$$

$$L_k = \sum_e \Theta_{ke}\, \omega_e = \sum_e \Theta_{ke}\, \delta_{ez}\, \omega_z = \underline{\underline{\Theta_{kz}}}\, \omega_z$$

$$T = \frac{1}{2}\,\Theta_{zz}\,\omega_z^2$$ : Kinetische E. f. feste Achse

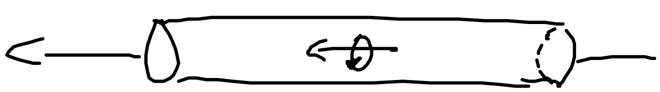
$\Theta_{zz}$ reicht aus f. kinetische Energie

$$L_k = \Theta_{kz}\,\omega_z$$ : i.a. $\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$

3 $\Theta$ sind nötig $(\Theta_{xz}, \Theta_{yz}, \Theta_{zz})$

um Drehimpuls zu beschreiben

noch ein Bsp. f. $\Theta_{zz}$ um feste Achse : Zylinder



Konstante Masse

$z \rightarrow$ $\omega_z$ $\leftarrow$ Länge $L$ , Radius $R$

$$T = \frac{1}{2}\underset{\text{ausrechnen}}{\Theta_{zz}}\ \underset{\text{vorgegeben}}{\omega_z^2}$$

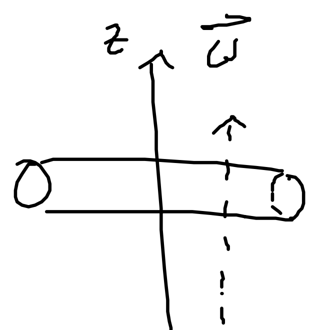
$$\underset{\text{abgelesen aus Trägheitstensormatrix}}{\Theta_{zz}} = \int d^3r'\,\rho_M(\vec{r}\,')\,(\underbrace{x'^2 + y'^2}_{\rho'^2})$$ Zylinderkoordinaten

$L$ $2\pi$ $R$

$$= \rho_M \underbrace{\int_0 dz' \int_0 d\varphi' \int_0 d\rho'\, \rho'}_{\text{Zylinderkoordinaten}} \rho'^2 \quad , \text{ mit } \rho_M = \frac{M}{\pi R^2 L}$$

$$= \underbrace{\frac{M}{\pi R^2 L}}_{\rho_M} L \, 2\pi \, \frac{\rho'^4}{4}\Big|_0^R = \underline{\underline{\frac{M}{2} R^2}}$$

<u>ohne Rechnung</u>: $\Theta_{zz}$ , wenn $\vec{\omega}$ :




$$\Theta_{zz} = \frac{MR^2}{4} + \frac{ML^2}{12}$$

was macht man bei „ungünstiger Lage"? (wenn die Rechnung lang wird)

Antwort

<u>Satz v. Steiner</u>:

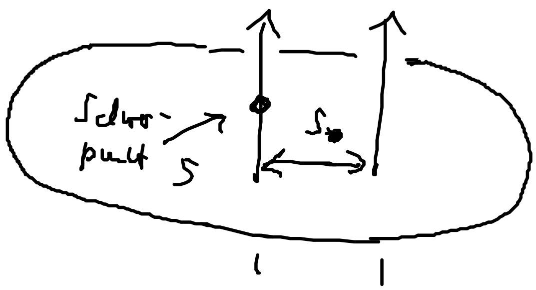
Für Trägheitsmomente zweier, parallel zueinander liegender Achsen von denen eine durch den Schwerpunkt geht gilt:

$$\Theta'' = \Theta'_S + M s_0^2$$

Trägheitsmoment einer Achse die // versetzt zur Schwerpunktachse liegt

TM f. Achse d. Schwerpunkt

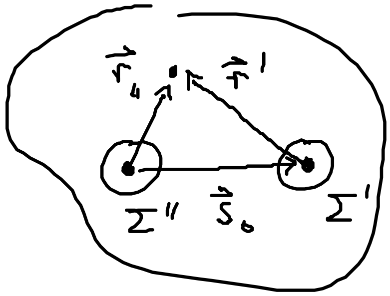
⊥ Abstand zwischen d. Achsen




linkes ausrechnen → andere gibt's frei !

Beweis :

$$\Theta''_{zz} = \sum_i m_i \left( x''^2(i) + y''^2(i) \right)$$ um // - Achse zu Schwerpunktachse




$\Sigma'$ : ist das Schwerpunktsystem

z- Achse aus Tafelebene heraus

$$\vec r'' = \vec r' + \vec S_0 \quad (\text{Umrechng. v. } \Sigma', \Sigma'')$$

$$\vec S_0 = (\vec x_0, \vec y_0, \vec z_0)$$

$$\Theta''_{zz} = \sum_i m_i \left[ (x'(i) + x_0)^2 + (y'(i) + y_0)^2 \right]$$

$$\Theta''_{zz} = \sum_i m_i \left[ \left(x'^2(i) + y'^2(i)\right) + \left(x_0^2 + y_0^2\right) \right]$$

$$+ \text{ Mischterm} \quad \underbrace{\sum_i m_i \, x'(i) \, x_0}_{} \quad \text{z.B}$$

$= 0$ da Schwerpktsystem $\Sigma'$

$$\Longrightarrow \Theta''_{zz} = \Theta'_S + S_0^2 \, M \quad \checkmark$$

$\uparrow$

$\perp$ Abstand

## 4.2. Dynamik starrer Körper

Keine Translationen, diese folgt Schwerpunkt (Massepunktmodell)

man nennt einen rotierenden, starren Körper „Kreisel".

Klassifizierung v. Kreiseln:

a) Form: symmetrischer Kreisel $\theta_{11} = \theta_{22}$ (2 TM sind gleich)

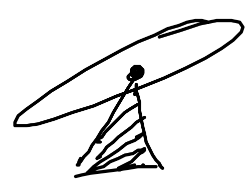
Kugelkreisel $\theta_{11} = \theta_{22} = \theta_{33}$ (3 TM sind gleich)

Würfel auch!

b) Krafteinfluß ohne äußere Kraft: „freier Kreisel"

mit Schwerkraft: „schwerer Kreisel"

ein freier Kreisel kann man herstellen indem man den Schwerpunkt unterstützt:



Lager f. Schwerpunkt

Grundgleichungen: Ziel: $\vec{\omega}(t)$ zu berechnen

bzw. zugehörige Drehwinkel (3)

typischerweise Eulersche Winkel, gemessen im Laborsystem

Laborsystem $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$

gesucht und zusammenhang mit $\vec{\omega}(t)$ — von außen

<u>körperfeste System</u>

$$\dot{\vec{L}}' + \underline{\underline{\vec{\omega}' \times \vec{L}'}} = \vec{M}'$$

im rotierenden System, siehe Kapitel Scheinkräfte

$\vec{L}' = \vec{L}'(\underline{\underline{\vec{\omega}'}})$ — gesucht

<u>Idee</u>: alles in $\Sigma'$ lösen, Vorteil: Hauptachsensystem!
dann nach $\Sigma$ zurücktransformieren

was ist $\vec{M}$ für den schweren Kreisel:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i$$ Drehmoment als $\sum_i$ einzelner Momente

wichtigster Fall Schwerkraft $\vec{f}_i = m_i \vec{g}$ in Erdnähe

$\vec{g}$: Fallbeschleunigung

$$\vec{M}' = \sum_i m_i (\vec{r}_0 + \vec{r}_i{}') \times \vec{g}$$

$\sum_i m_i \vec{r}_i{}' = 0$ im $\Sigma'$

$$\vec{M}' = \sum_i m_i \vec{r}_0 \times \vec{g} = M \vec{r}_0 \times \vec{g}$$

Konstant in

Bewegungsgl.