

4.2.2.3 Anwendung Stabilitätsanalyse auf Erbgleichung des freien Krähls

Kräftefreier Krähel mit 3 Fixpunkten $p = p_0$, $q = 0$, $r = 0$
+ 2 x zyklisch vertauscht

$$\dot{p} = f_p = \frac{B-C}{A} q r = 0$$

$$\dot{q} = f_q = \frac{C-A}{B} p r = 0$$

$$\dot{r} = f_r = \frac{A-B}{C} p q = 0$$

Form $\dot{x}_i = f_i$ Fixpunkte



Frage nach Stabilität
der Fixpunkte

Ide: Untersuchung klein Auslenk $\delta \vec{x}$ aus Ruhelage,
zerlegt nach Eigenvektoren \vec{u}_n und Eigenwerte λ_n der

Jacobi matrix J : $\delta \vec{x} = \sum_n e^{\lambda_n t} \vec{u}_n \epsilon_n$, $J = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = f_{j,i}$

($x_i \rightarrow p, q, r$, $f_j \rightarrow f_p, f_q, f_r$)



$$J = \begin{pmatrix} f_{p/p} & f_{q/p} & f_{r/p} \\ f_{p/q} & f_{q/q} & f_{r/q} \\ f_{p/r} & f_{q/r} & f_{r/r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_{ij} \\ 0 & 0 & \frac{A-B}{C} p_0 \\ 0 & \frac{C-A}{B} p_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fixpunkt $\vec{w}_0 (p_0, 0, 0)$ Fixpunkt

$$\begin{matrix} \nearrow & \nwarrow \\ p_0 = 0 & r_0 = 0 \end{matrix}$$

Eigenwert über Lösg. der charakteristischen Gleichung: $\lambda_n = ?$

Determinante der Matrix $-\lambda \hat{I}$

$$-\lambda \left(\lambda^2 - \frac{(C-A)(A-B)}{B \cdot C} p_0^2 \right) \Big|_{p_0^2} \stackrel{!}{=} 0$$

damit nicht triviale Lsg. existiert

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \hat{=} \text{kubische Gleichung}$

o/ $\lambda_1 = 0 \hat{=} e^{0t} \cdot \vec{u}_1 \hat{=} \text{konstante Lösung}$

Eigenwert: ein Eigenwert 0 : $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & x' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Stütz in x -Richtung und klein- \rightarrow groß \vec{u}_1
 \uparrow
von \vec{u}

klein Stütz zu $(p_0 + \varepsilon_1 \vec{u}_1, 0, 0)$

\uparrow
konkret Stütz.

$$b) \lambda_{2/3} = \pm p_0 \left(\frac{(C-A)(A-B)}{C \cdot B} \right)^{1/2}$$

\uparrow
1x positiv / 1x negativ

all. offensichtlich, wenn $(\quad) > 0$ ist

dann gilt es zu Testbarkeit weil $\lambda_2 > 0$

wann $(C-A)/(A-B) > 0$?

ist > 0 wenn: $C > A > B$ oder auch $C < A < B$

Die Achse mit dem mittleren Triebwert A ist instabil

ganz stabil?

wenn unter Standard etwas negativ steht
 So $\lambda \rightarrow i a \Rightarrow$ stabil und Oszillation
 mit $e^{i a t}$ entstehen und die beschränkt
 sind:

wenn: $A > c, B$ oder auch $B > A, c > A$

Die Rotation um die x-Achse ist stabil wenn
 A das kleinste / größte Eigenwert ist
 bzw instabil wenn A der mittlere Eigenwert ist.

4.2.2.4. Kraftfrei symmetrischer Kugel mit $\vec{\omega}(t)$

symmetrisch: $A = B$ (gleichsymmetrie)

Kraftfrei: \vec{M} (Drehmoment) = 0

Eulergleichg.:

(Σ')	$A \dot{p}$	$- (A-c) / q r$	$= 0$
\downarrow spibe	$A \dot{q}$	$+ (A-c) p r$	$= 0$
(Σ)	$c \dot{r}$	$(A-B)$	$= 0$

erlaubt Eulerpräzesse:
 1. fl. mit p, 2. fl. mit q
 multiplizieren / fl. addieren
 $\frac{A}{2} \frac{d}{dt} p^2 + \frac{A}{2} \frac{d}{dt} q^2 = 0$
 $\downarrow p^2 + q^2 = \text{konstant}$

$\vec{r} = 0 \Rightarrow r = r_0 = \text{konst}$

↓ Die z' Komponenten $\vec{\omega}'$ ist konstant ebenso $p^2 + q^2 + r_0^2 = (\vec{\omega}')^2 = \text{konstant}$.

Die gesamte Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}'(t)$ hat ein konstantes Betrag

außerdem $r = r_0$ und gl. f. p. differenzieren nach t

$$A\ddot{p} - (A-C)\dot{q}r_0 = A\ddot{p} + \frac{(A-C)^2}{A} p r_0^2 = 0$$

\uparrow
 \dot{q} aus 2. Gleichung einsetzen

↓ $\ddot{p} + k^2 p = 0$ mit $k = \frac{(A-C)}{A} r_0$

Oszillationsgleichung.

ebenso:

$$\ddot{q} + k^2 q = 0$$

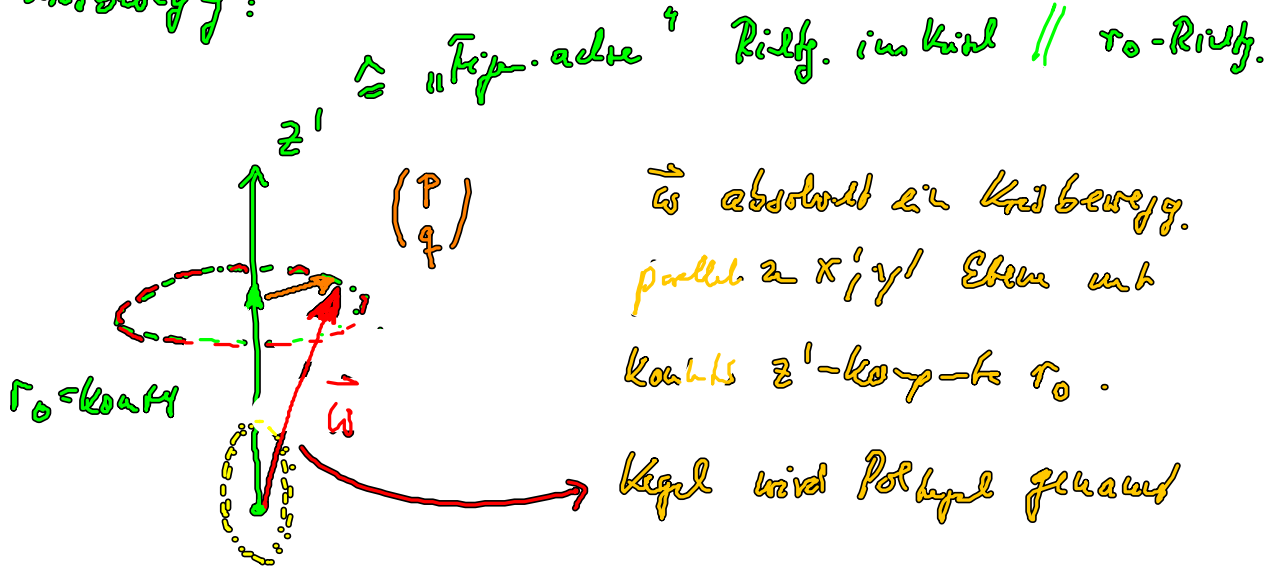
Lösung f. p/q: $p/q = A \sin kt + B \cos kt$

\uparrow
konstant an Anfangsbedingungen

$$p = p_0 \sin(\kappa t) \quad q = p_0 \cos(\kappa t) \quad \rightarrow \text{Kreisbeweg.}$$

erfüllt Dgl. + Erhaltungssatz $p^2 + q^2 = p_0^2$

Einer a Kreisbeweg.:



Umkehr. d. Dynamik von $\Sigma' \rightarrow \Sigma$

leitet VL: Umkehr. von $p \rightarrow p(\vartheta, \varphi, \zeta)$, q, r analog

$$p = \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \zeta + \dot{\zeta} \cos \zeta = p_0 \sin(\kappa t)$$

$$q = \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \zeta - \dot{\zeta} \sin \zeta = p_0 \cos(\kappa t)$$

$$r = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\zeta} = r_0 = \text{konst}$$

↑

Spezialfall f. unv. Fall

bei Kraft frei Kreis ist \vec{L} erhalten in Σ System $\dot{\vec{L}} = 0$

aufspan in Σ' System, in dem $\vec{L}' \neq \text{konstant}$ ist

$$L_x' = L_0 \sin \vartheta \sin \varphi = A p = A (\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi)$$

$$L_y' = L_0 \sin \vartheta \cos \varphi = A q = A (\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi)$$

$$L_z' = L_0 \cos \vartheta = C r = C r_0 \quad (*1)$$

Lage des Drehimpuls
ist erhalten

aufspan mit Euler φ

in Hauptachs system
Zshg. L' und ω'

1

2

3

4

an 2. und 4. Spalte:

(i) $\dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0 = \text{konstant}$ um die Dgl. 2 erfüllen

(ii) $\dot{\varphi} = \text{konstant} \rightarrow \varphi = c_1 t + c_2$

an 3. und 2. Spalte

$$A p_0 \sin(\underline{\omega t}) = L_0 \sin \dot{\vartheta}_0 \sin \underline{\varphi}$$

$$A p_0 \cos(\underline{\omega t}) = L_0 \sin \dot{\vartheta}_0 \cos \underline{\varphi} \quad (*2)$$

$$\downarrow \varphi = k t$$

Die Endwerte sind $\vartheta = \vartheta_0$, $\varphi = c_2 t + c_1$, $\psi = k t$

verschiedene Konstante sollte nur von A, C, p_0, r_0 festgelegt sein.

$\underbrace{\hspace{10em}}$ $\underbrace{\hspace{10em}}$
 feuchte AB

$$(*1) : \cos \vartheta_0 = \frac{C r_0}{L_0}$$

$$(*2) \quad \sin \vartheta_0 = \frac{A p_0}{L_0}$$

$$\left. \begin{array}{l} (*1) \\ (*2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \tan \vartheta_0 = \frac{A}{C} \frac{p_0}{r_0} \end{array}$$

ausg f. φ :

$$\varphi = \frac{r_0}{\sin \vartheta_0} t + \varphi_0$$

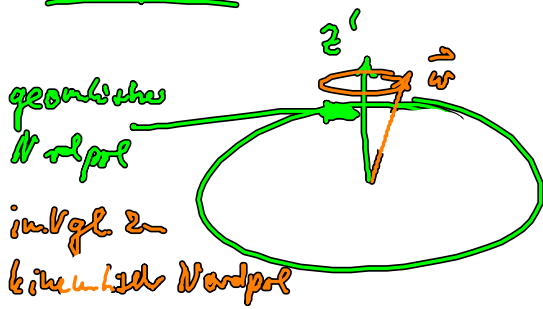
↑
 freie Wirt an
 Beginn

Endwerte sind komplett durch AB (r_0, p_0) und feuchte (A, C) bestimmt, ϑ ist konst., φ und ψ wachsen linear mit Zeit.

Interpretation:

$$\vec{L} = \text{konst.}, \hat{=} z\text{-Achse}$$

Beispiel Erde als abgeplattete Rotationsellipsoid



$\vec{\omega}$ läuft um die Tz-Achse und beschreibt ein Polkegel

Präzessionskonstante: Kreisbewegung.

$$k = \frac{C-A}{A} r_0$$

ist Oszillationsfrequenz der Kreisbewegung.

Hauptachsenträgheitsmomente

z' -Komponente des $\vec{\omega}'$

$$r_0 = \frac{2\pi}{1 \text{ Tag}}$$

↓

1

300

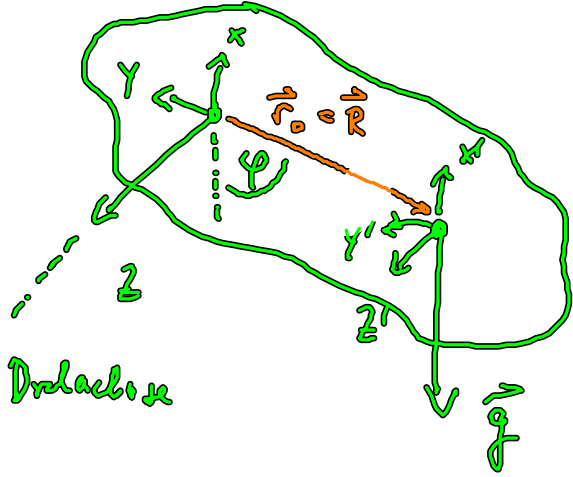
$$T = \frac{2\pi}{k} = 300 \text{ Tage}$$

Messung: 433 Tage, weil Erde kein ideales starrer Körper.

(Chandler)

4.2.2.5 physischer Zitter

einfachste Polweg und feste Achse und Schwerkraft



Rotation ein starrer Körper
um feste Achse in z-Richtung

\vec{R} Schwerpunkt

$$\vec{\omega} = \omega_z \vec{e}_z$$

Eulergleichung: $\dot{\vec{L}}' + \underbrace{\vec{\omega}' \times \vec{L}'} = \vec{M}'$

hat kein z' -Komponente

und $\vec{\omega}$ in z' Richtung. ($\parallel z$) zeigt

dass Kreuzprodukt = 0

$$\dot{L}'_z = M'_z = [M \vec{r}_0 \times \vec{g}]_z$$

M : Gesamtmasse
d. starren Körpers

VL starrer Körper \mathbb{I}

$$\dot{L}'_z = -M r_0 g \overbrace{\sin \varphi}^{\text{Kreuzprodukt}}$$

reife Handregel

liefert: $L'_z = \Theta_{zz} \omega'_z$ Rotation um feste Achse

$$\downarrow \quad \Theta_{zz} \dot{\omega}'_z = -M r_0 g \sin \varphi$$

$$\text{mit } \vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_z'$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} = - \frac{M r_0 g}{\Theta_{zz}} \sin \varphi} = - \frac{g}{l_{\text{eff}}} \sin \varphi$$

Ist Seilung φ klein, auch Θ_{zz} pendelt
um die Frequenz über effektiven Fadenlänge $\left(\frac{\Theta_{zz}}{M r_0} \right)$
interpretiert wird. (auch Beschreibung.)

Was ist Θ_{zz} ?

↙ Achse im Schwerpunkt

$$\Theta_{zz} = \Theta_S + M r_0^2$$

nach Satz v. Steiner