

4.3 Diffusion

4.3.1 Transport in Zellen

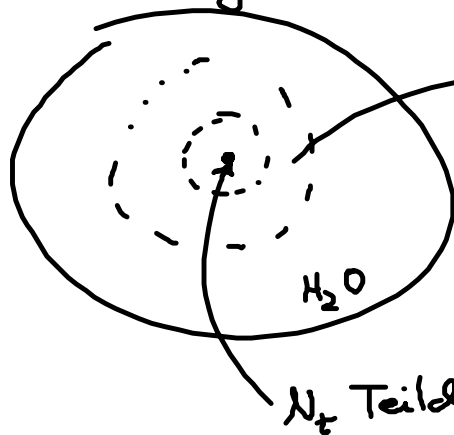
- Diffusion anwendbar auf $\left. \begin{array}{l} \text{Kolloide} \\ \text{Tinte-Moleküle} \\ \text{Kleine " } \end{array} \right\} \text{ in } \text{H}_2\text{O}$

↳ Bsp: $D \approx 10^{-9} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 1 \frac{\mu\text{m}^2}{\text{ms}}$ (4.17)

- Messung von D ?

(i) Beobachtung einzelner Teilchen

(ii)



Konz. Profil:

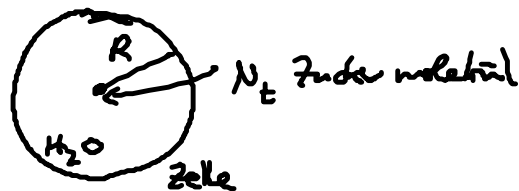
$$c(x, t) = N_t P(x, t) \quad (4.18)$$

$$\rightarrow \langle x^2 \rangle = 6Dt$$

$$= \frac{1}{N_t} \int x^2 c(x, t) d^3x$$

- Bsp:

Bakterium: $R = 1 \mu\text{m}$
menschl. Zelle: $R = 10 \mu\text{m}$

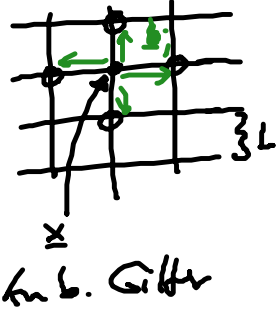


$$t = \frac{R^2 (4.17)}{6D} \begin{cases} 0,2 \text{ ms} \dots \text{Bakterium} \\ 20 \text{ ms} \dots \text{menschl. Zelle} \end{cases}$$

⇒ Mikro-Kosmos: Diffusion schnell (Bsp. Bakterium)
darüber: andere Transportmechanismen (Bsp. Mikrotubuli)
Bsp: Nervenzellen: bis zu 1m

4.3.2. Diffusionsgleichung

• ? $P(x, t) = \frac{1}{z} \sum_{i=1}^z P(x-b_i, t-\Delta t)$



z... Anzahl
nächster
Nachbarn

Taylor: $P(x, t) - \frac{\partial P}{\partial t} \Delta t - \underbrace{b_i \cdot \nabla P}_{\rightarrow 0} + \frac{1}{2} b_{i\alpha} b_{i\beta} \frac{\partial^2 P}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$

wegen $\sum_i b_i = 0$ $\frac{1}{z} \sum_i b_{i\alpha} b_{i\beta} \stackrel{!}{=} \frac{1}{d} L^2 \delta_{\alpha\beta}$

(i) $= \tilde{c} \delta_{\alpha\beta}$, wegen kubischer Symmetrie

(ii) Spur: $\alpha = \beta$

$\frac{1}{z} \sum_i \frac{b_i^2}{L^2} = L^2 = \tilde{c} d \rightarrow \tilde{c} = \frac{L^2}{d}$

$\times \frac{1}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial t} - D \nabla^2 P = 0} \quad (4.19)$

$D = \frac{1}{2d} \frac{L^2}{\Delta t}$

vgl. (4.2) ... Diffusionsgleichung

• phänomenolog. Herleitung:

(i) Erhaltung der Teilchenzahl: $\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div } j = 0} \quad (4.20)$

Teilchenzahl-
Erhaltung

... Kontinuitätsgleichung
wegen Teilchenzahl-
erhaltung

(ii) Materialgesetz:

$\boxed{j = -D \nabla c} \quad (4.21)$

... 1. Ficksches Gesetz
(Strom versucht ∇c auszugleichen!)

(ii) in (i)

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial c}{\partial t} - D \nabla^2 c = 0} \quad (4.22)$

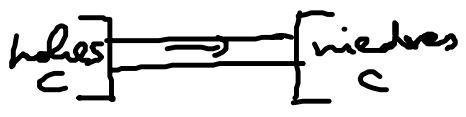
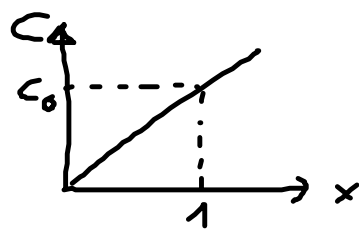
... 2. Ficksches Gesetz

D... Materialparameter, mikroskop. Ausdruck in (4.19)

- Lösungen: (i) $c(x,t) = c_0 \hat{=} \text{thermodynam. GG}$

(ii) 1D: $c(x,t) = c_0 x \dots$ stationäres Profil

(ständig Zu- und Abfuhr von Teilchen)



(iii) Greensche Fkt.: $G(x-x_0, t-t_0)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D \nabla^2\right) G(x-x_0, t-t_0) = N_t \delta(x-x_0) \delta(t-t_0) \quad (4.23)$$

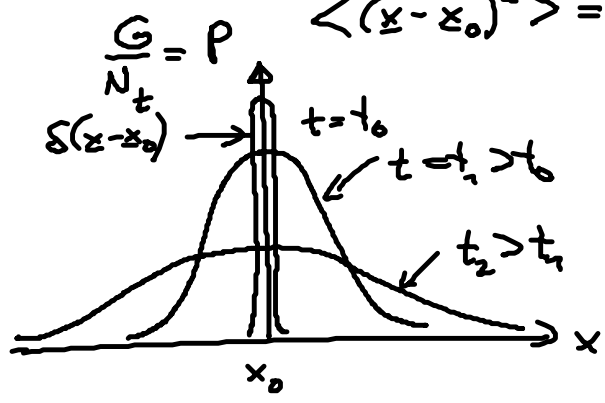
Quelle: zur Zeit $t=t_0$ am Ort $x=x_0$ werden N_t Teilchen losgelassen

o.B. [Übungen]

$$G(x-x_0, t-t_0) = \frac{N_t}{[4\pi D(t-t_0)]^{3/2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}} \quad (4.24)$$

... Gaußsche Verteilung

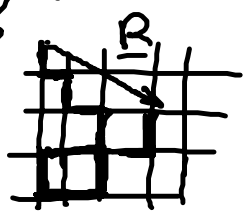
$$\langle (x-x_0)^2 \rangle = 6D(t-t_0) \quad \infty$$



Konzentrationsunterschiede werden ausgeglichen

0 identen Polymerkette: $t \sim N$: End-zu-End Vektor $\underline{R} = \underline{x}$

... Gaußsche Verteilung



Bem: (i) Diffusion = Zufallsprozess \rightarrow (4.22) $\hat{=} \text{deterministisches Gesetz für } c(x,t) \sim P(x,t)??$

statistische Fluktuationen:

$$c(x,t) - c_{\text{real}}(x,t) \sim \frac{1}{\sqrt{N_t}} \rightarrow 0, \quad N_t \rightarrow \infty$$

... thermodynam. Limes

(ii) Gaußsche Verteilung:

gültig für $N \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0, L \rightarrow 0$

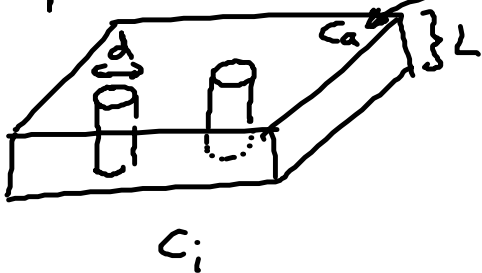
so daß $t = N \Delta t, D = \frac{1}{2l} \frac{L^2}{\Delta t} = \frac{1}{2l} \frac{N L^2}{t}$ endlich

4.4. Diffusion in der Biologie

4.4.1 Durchlässigkeit (Permeabilität) von künstl. Membranen

• Membran-Modelle:

(i) passive Kanäle/Poren: Mol.konz. in H_2O , z.B. Zucker



$$\Delta c = c_i - c_a$$

$L \gg d \rightarrow$ stationäre 1D-Diffusion durch Kanäle: $j_k = -D \frac{\Delta c}{L}$

Linien-
Konz.profil

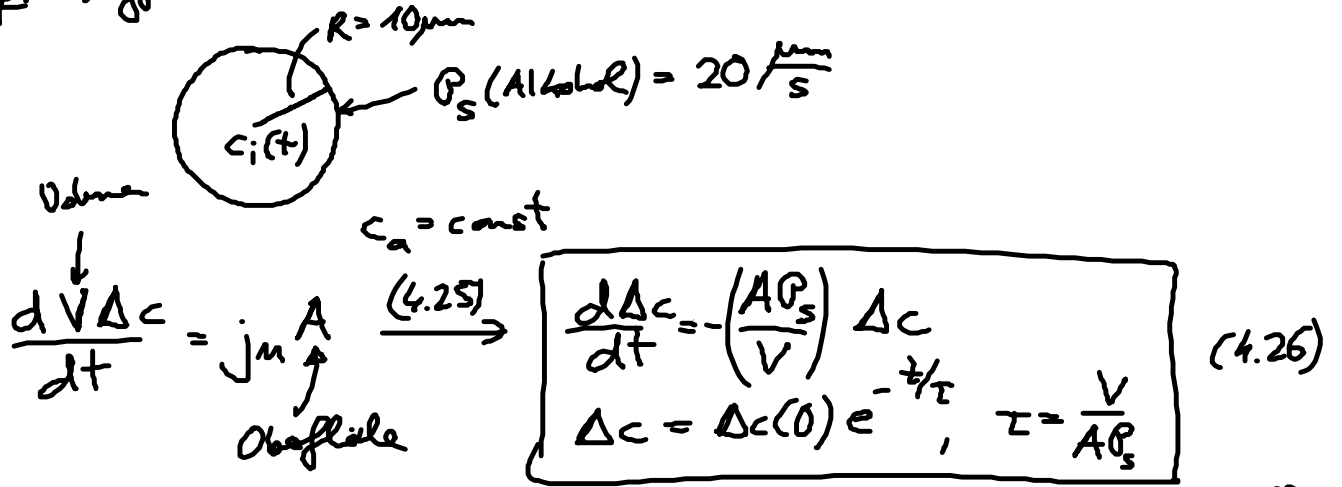
mit α ... Flächenanteil der Poren:

$$j_M = -P_s \Delta c \quad (4.25)$$

$$P_s = \alpha \frac{D}{L}$$

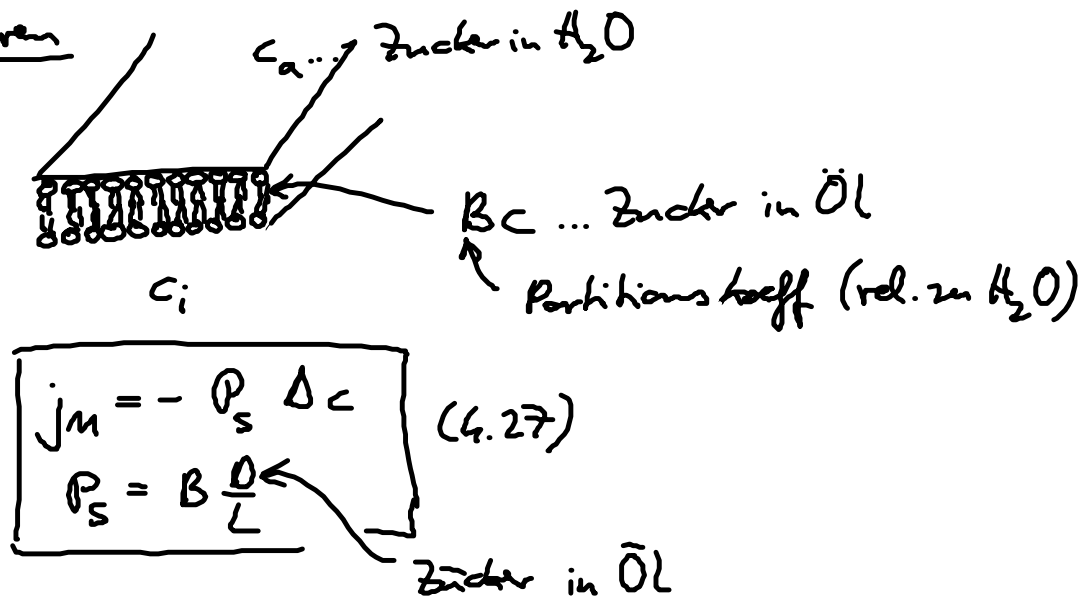
... Permeabilität der Membran für „solute“

Bsp: Diffusion von Alkohol aus Zelle



hier: $\tau = 0.2 \text{ s}$

(ii) keine Poren



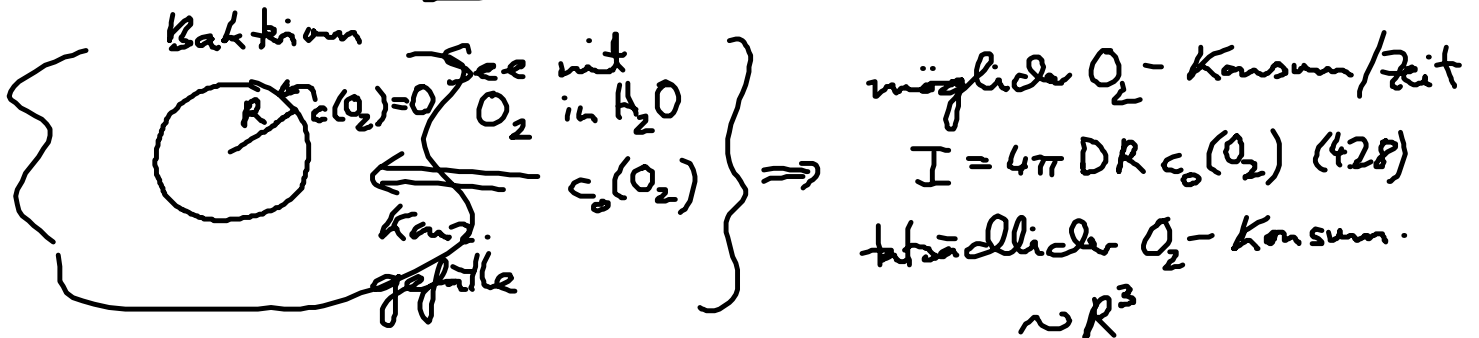
$$j_m = -P_s \Delta c$$

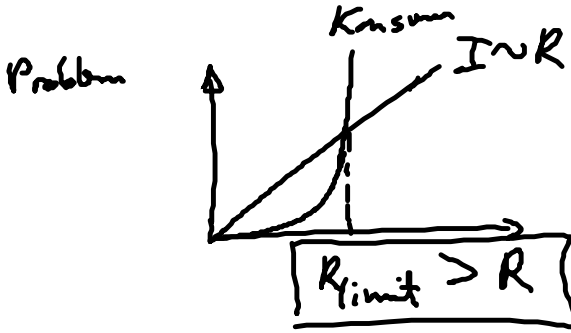
$$P_s = B \frac{D}{L}$$

(4.27)

Bsp: Glukose: $P_s = 10^{-3} \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$
 Na^+, Cl^- : $P_s = 1-100 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$ } Zelle: P_s viel größer
 \rightarrow weitere Mechanismen

4.4.2 Bakterieller Metabolismus





... für reine Diffusion!

4.4.3 Nernst-Relation \leftrightarrow Membran Potentiale

$|E| = \frac{\Delta V}{d} \rightarrow$ elektrophoretische Fluß $\hat{=} \text{Elektrolyt-Leitung}$

Elektrolyt

$$j_e = c \cdot v_d \quad (4.13) \quad \left[\frac{c \cdot q}{\gamma_{\text{ion}}} E \right] \quad (4.23)$$

Iner. konz. Drift-geschw. Leitungscoeff.

& inhomog. $c \rightarrow$ Diffusionsstrom & Einstein: $D = \frac{k_B T}{j_e}$

\Rightarrow Teilchendichte:

$$j = j_0 + j_e = D \left(-\nabla + \frac{q}{k_B T} E \right) c \quad (4.30)$$

... Nernst-Planck-Formel

o Gleichgewicht: $j = 0 \dots E \leftrightarrow$ inhomog. c