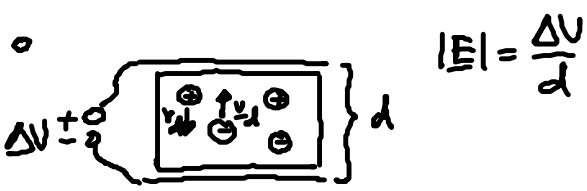


4.4.3 Nernst-Relation \leftrightarrow Membran Potentiale



\Rightarrow Teilchenstromdichte:

$$\underline{j = j_0 + j_e = D \left(-\nabla + \frac{q}{k_B T} \underline{E} \right) c} \quad (4.30), \quad D = \frac{k_B T}{\mu}$$

... Nernst-Planck-Formel

◦ Gleichgewicht: $j = 0$... $\underline{E} \leftrightarrow$ inhomog. c

$$\frac{(4.30) = 0}{c} \rightarrow$$

$$\frac{\nabla c}{c} = \frac{q}{k_B T} \underline{E} \quad \left| \int_1^2 \dots \cdot d\underline{s} \right\} : \Delta V_{eq} = - \int \underline{E} \cdot d\underline{s} \dots$$

Potentialunterschied

$$\Rightarrow \underline{\Delta(\ln c) = \ln c_2 - \ln c_1 = - \frac{q}{k_B T} \Delta V_{eq}} \quad (4.31)$$

... Nernst-Relation

NB: $c_2 = c_{\text{oben}}$, $c_1 = c_{\text{unten}}$

Bem: (i) (4.31) gültig für kleine $c \cong$ Ww zwischen Ionen vernachlässigbar

- (ii) ⊕ unter bei neg. Elektr.
- ⊖ " " pos. "

(iii) e (4.31) \rightarrow $\frac{c_2}{c_1} = e^{-\frac{q}{k_B T} \Delta V_{eq}}$ (4.32)

... Boltzmannfaktor ∞

kontrolliert GG-Verteilung

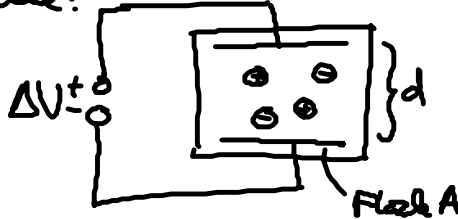
(kein D, da keine dynam. Größe)

(iv) Bsp: Na^+ : $q = e > 0$, $\frac{c_{oben}}{c_{unten}} = 0.1$, $k_B T_r = \frac{1}{40} \text{eV}$ ∞

$\rightarrow \Delta V_{eq} = 62 \text{mV}$ \equiv Membran-Potentiale (aber: im Nicht-GG)

4.4.4 Elektr. Widerstand \leftrightarrow Dissipation

o Elektrolyt-Zelle:



$j_L = q j_e \stackrel{(4.31)}{=} G E$ (4.33)
 $G = \frac{c q^2}{\rho} = \frac{D q^2 c}{k_B T}$... Leitfähigkeit

1D: $\Delta V = E d$
 Strom $I_{ion} = j_L A$

$\Delta V = R I_{ion}$
 $R = \frac{1}{G} \frac{d}{A}$

(4.34)
 ... Ohmsches Gesetz für jede Ionensorte
 ... elektr. Widerstand

• Merke: Erhaltungsgröße & ungeordnete Bewegung
 \rightarrow diffusive Transportgesetz

(i) Teilchen diffusion: $j = -D \nabla c$
 (ii) Energieerhaltung \rightarrow Wärmetransport: $j_Q = -\kappa \nabla T$
 ... \rightarrow ... $\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \nabla^2 T = 0$ (4.35)

ungeordnete Bewegung

5. Hydrodynamik in der Nanowelt

- Bio-Frage: Warum bewegen sich Bakterien anders fort als Fische?
- Physikal. Idee: Reibung dominiert in der Nanowelt

5.1 Die Navier-Stokes-Gleichungen

- zentrale Grundgleichungen für Geschw. feld $\underline{v}(\underline{x}, t)$ einer viskosen isobaren = Newtonsche Flüssigkeit

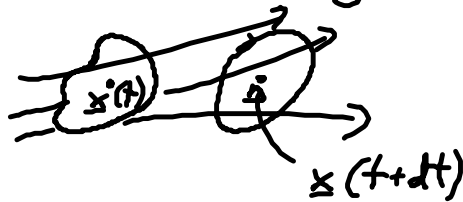
5.1.1 Grundgleichungen

- Beschränkung: in kompressible Flüssigkeiten: $\text{div } \underline{v} = 0$ (5.1)

Herleitung: Massenerhaltung differentiell:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\underbrace{\rho \underline{v}}_{\text{Massenstromdichte}}) = 0 \quad (5.2)$$

mit $\underbrace{\frac{d\rho(\underline{x}, t)}{dt}}_{\text{totale materielle Zeitableitung}} = \underbrace{\frac{\partial \rho(\underline{x}, t)}{\partial t}}_{\text{lokale Zeitableitung}} + \underbrace{\underline{v} \cdot \nabla \rho(\underline{x}, t)}_{\text{konvektive Zeitableitung}} \quad (5.3)$



$$\frac{dx_i}{dt} \quad \nabla_i \rho(\underline{x}, t)$$

mit $\text{div}(\rho \underline{v}) = \rho \text{div } \underline{v} + \underline{v} \cdot \nabla \rho$

in (5.2) $\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \underline{v} = 0 \quad (5.3)$

in kompressibel: $\frac{d\rho}{dt} = 0 \rightarrow \text{div } \underline{v} = 0 \quad (5.1)$

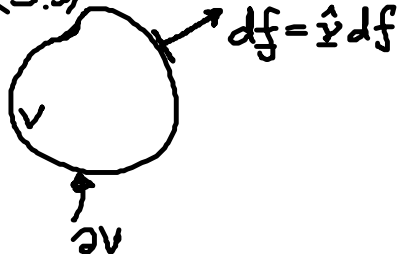
• Navier-Stokes-Gl:

$$\underbrace{\rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right)}_{\text{Trägheit}} = - \underbrace{\nabla p}_{\text{Druck}} + \underbrace{\eta \nabla^2 \underline{v}}_{\text{Reibung!}} + \underbrace{\rho \underline{b}}_{\text{Volumenkraftdichte}} \quad (5.4)$$

$\eta \dots$ Skalerviskosität Bsp: $\underline{b} = \underline{g}$... Gravitation
 elektr./magn. Felder

• Um schreibung: Spannungstensor \underline{T} , in Komp. T_{ij} , $i, j = 1 \dots 3$

→ Oberflächekraft auf Flüssigkeitsvolumen:

$$\boxed{F_{0i} = \int_{\partial V} T_{ij} d\mathcal{F}_j \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_V \nabla_j T_{ij} d^3x = \int_V (\text{div } \underline{T})_i d^3x} \quad (5.5)$$


o.B.: $\boxed{T_{ij} = \underbrace{-p \delta_{ij}}_{(1)} + \underbrace{2\eta A_{ij}}_{(2)}} \quad (5.6)$

... beschreibt innere Kräfte in Flüssigkeit

(1) $F_0 = - \int p d\mathcal{F}$, $p d\mathcal{F} \parallel d\mathcal{F}$! ... keine Schubspannung ($\perp d\mathcal{F}$)

$\overline{F_0} = - \int \nabla p d^3x$
 $\nabla_j (p \delta_{ij}) = \nabla_i p$ s. Gl. (5.4)

(2) Newton'sche Flüssigkeit:

dissipativer Anteil von $T_{ij} \sim A_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$... Skalerrate (5.7)

(i) $2\eta A_{ij} \dots$ für isotrope Flüssigkeiten

[mehr Terme für komplexe, anisotrope Flüssig.]

(ii) $\omega_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j - \nabla_j v_i) \longrightarrow \omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_{jk}$ (S.8)

$\longrightarrow \underline{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \underline{v}$



Vortex!
kein Beitrag zur
Dissipation

mit $\nabla_j T_{ij} \stackrel{(S.7)}{=} \nabla_j (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \stackrel{(S.6)}{=} 0 \stackrel{\nabla \cdot \underline{v}}{=} \nabla^2 v_i$

(S.4) $\longrightarrow \boxed{\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \text{div } \underline{T} + \rho \underline{b}}$ (S.9)

... Impulserhaltung für
kontinuierliche Medien

• $\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \dots$ Nichtlinearität! \rightarrow Chaos, Turbulenz

S.1.2 Stationäre Lösungen

• Scher geometrie: v_0



$\left. \begin{array}{l} \underline{b} = 0 \\ p = p_0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = 0 \\ \longrightarrow \nabla^2 \underline{v} = 0 \end{array} \longrightarrow \boxed{\underline{v} = v(z) \underline{e}_x = v_0 \frac{z}{d} \underline{e}_x}$ (S.10)

$\longrightarrow \boxed{T_{xz} = \eta \frac{\partial v(z)}{\partial z} = \eta \frac{v_0}{d}}$ (S.11)

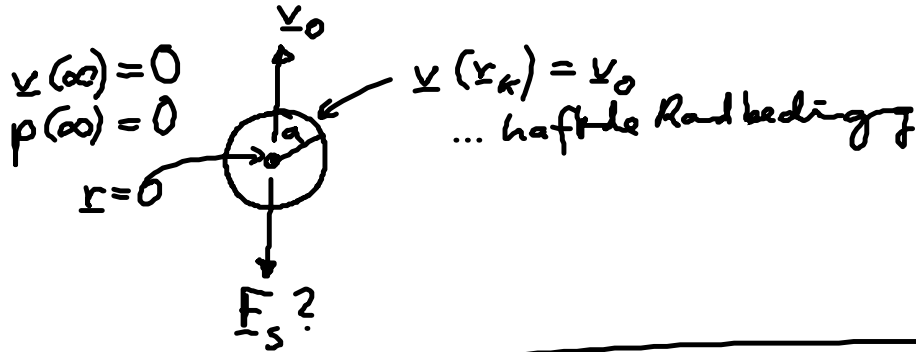
\longrightarrow Masse η !

• Stokesche Reibung:

(1) Translation:

\longrightarrow Einstein: N_A

\longrightarrow Millikan: e



$$(1) \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$(2) \underline{b} = 0$$

$$(3) \text{ Annahme: } \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \ll -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v}$$

a.B.:

$$v_i(\underline{r}) = \left[\frac{3}{4} \frac{a}{r} (\delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2}) + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{r}\right)^3 (1 - 3 \frac{r_i r_j}{r^2}) \right] v_{0j} \quad (5.12)$$

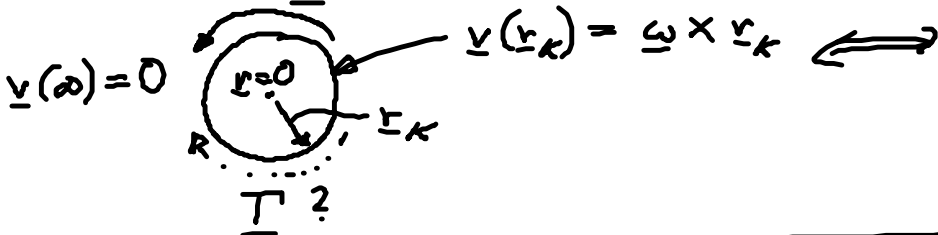
$$p(r) = \frac{3}{2} \eta \frac{a}{r^2} \underline{r} \cdot \underline{v}_0$$

⇒ Stokesche Reibungskraft auf Kugel:

$$\underline{F}_s = \int_{\partial V_k} \underline{\Gamma} d\underline{f} = -6\pi\eta a \underline{v}_0 \quad (5.13)$$

→ Messgröße η ↙ Wirbelfeld

(2) Rotation



$$\underline{v} = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \underline{\omega} \times \underline{r} \quad (5.14)$$

$$p = ?$$

$$\underline{\Gamma} = \int_{\partial V_k} \underline{r}_k \times \underline{\Gamma} d\underline{f} = -8\pi\eta a^3 \underline{\omega} \quad (5.15)$$

... viskoses Drehmoment