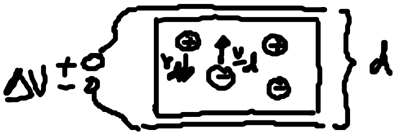
4.4.3 Nernst-Relation $\longleftrightarrow$ Membran Potentiale

∘ $|\underline{E}| = \frac{\Delta V}{d}$



$\Longrightarrow$ Teilchenstromdichte:

$$\boxed{\underline{j} = \underline{j}_D + \underline{j}_e = D\Big(-\nabla + \underbrace{\frac{q}{k_B T}\underline{E}}_{\underline{v}_D}\Big)c} \quad (4.30), \qquad D = \frac{k_B T}{\gamma}$$

... Nernst-Planck-Formel

∘ Gleichgewicht: $\underline{j} = 0$ ... $\underline{E} \longleftrightarrow$ inhomog. c

$$\xrightarrow[c]{(4.30)=0} \quad \underbrace{\frac{\nabla c}{c}}_{\nabla \ln c} = \frac{q}{k_B T}\underline{E} \quad \Big| \int_1^2 \ldots \cdot d\underline{s} \quad \Big\} : \Delta V_{eq} = -\int \underline{E}\cdot d\underline{s} \ \ldots$$

Potentialunterschied

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\Delta(\ln c) = \ln c_2 - \ln c_1 = -\frac{q}{k_B T}\Delta V_{eq}} \quad (4.31)$$

... Nernst-Relation

1D: $c_2 = c_{oben}$, $c_1 = c_{unten}$

Bem.: (i) (4.31) gültig für kleine c ≙ Ww zwischen Ionen vernachlässigbar

(ii) ⊕ unten bei neg. Elektr.

⊖ " " pos. "

(iii) $e^{(4.31)} \longrightarrow$ $$\boxed{\frac{c_2}{c_1} = e^{-\frac{q}{k_B T}\Delta V_{eq}}} \qquad (4.32)$$

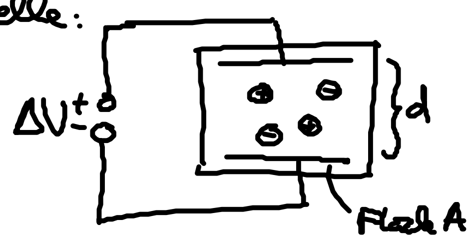
... Boltzmannfaktor !!
kontrolliert GG-Verteilung
(kein D, da D eine dynam. Größe)

(iv) Bsp: Na^+: $q = e > 0$, $\frac{c_{oben}}{c_{unten}} = 0.1$, $\boxed{k_B T_r = \frac{1}{40}\,eV}$!!

$\longrightarrow$ $\boxed{\Delta V_{eq} = 62\,mV}$ ≙ Membran-Potentiale (aber: im Nicht-GG)

4.4.4 Elektr. Widerstand $\longleftrightarrow$ Dissipation

∘ Elektrolyt-Zelle:



$$\boxed{\begin{aligned} j_L &= q\,j \overset{(4.29)}{=} \sigma\,\underline{E} \\ \sigma &= \frac{c q^2}{\gamma} = \frac{D q^2 c}{k_B T} \end{aligned}} \qquad (4.33)$$

... Leitfähigkeit

1D: $\Delta V = E d$
Strom $I_{ion} = j_L A$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta V &= R\; I_{ion} \\ R &= \frac{1}{\sigma}\frac{d}{A} \end{aligned}} \qquad (4.34)$$

... Ohmsches Gesetz für jede Ionensorte
.... elektr. Widerstand

• Merke: Erhaltungsgröße & ungeordnete Bewegung
$\longrightarrow$ diffusive Transportgesetze

(i) Teilchendiffusion: $\underline{j} = -D\underline{\nabla} c$

(ii) Energieerhaltung $\longrightarrow$
Wärmetransport: $j_Q = -\kappa \underline{\nabla} T$

... $\longrightarrow$ ... $\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \underline{\nabla}^2 T = 0$ (4.35)

ungeordnete Bewegung

5. Hydrodynamik in der Nanowelt

- Bio-Frage: Warum bewegen sich Bakterien anders fort als Fische?

  Physikal. Idee: Reibung dominiert in der Nanowelt

5.1 Die Navier-Stokes-Gleichungen

- zentrale Grundgleichungen für Geschw.feld $\underline{v}(\underline{x},t)$ einer viskosen isotropen = Newtonschen Flüssigkeit

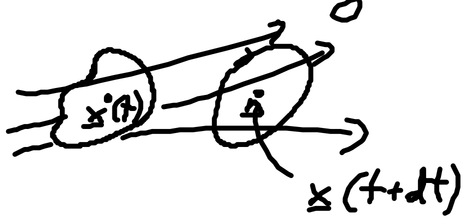
5.1.1 Grundgleichungen

- Beschränkung: inkompressible Flüssigkeiten: $\operatorname{div} \underline{v} = 0$ (5.1)

  Herleitung: Massenerhaltung differentiell:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\underbrace{\rho \underline{v}}_{\text{Massenstromdichte}}) = 0 \qquad (5.2)$$

$$\text{mit} \quad \underbrace{\frac{d\rho(\underline{x},t)}{dt}}_{\substack{\text{totale}\\\text{materielle}\\\text{Zeitableitung}}} = \frac{\partial \rho(\underline{x},t)}{\partial t} + \underbrace{\underline{v} \cdot \nabla \rho(\underline{x},t)}_{\substack{\text{konvektive}\\\text{Zeitableitung}}} \qquad (5.3)$$



$$\underbrace{\frac{dx_i}{dt}}_{v_i} \nabla_i \rho(\underline{x},t)$$

mit $\operatorname{div}(\rho \underline{v}) = \rho \operatorname{div} \underline{v} + \underline{v} \cdot \nabla \rho$

in (5.2) $\quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0 \qquad (5.3)$

inkompressibel: $\frac{d\rho}{dt} = 0 \longrightarrow \operatorname{div} \underline{v} = 0 \qquad (5.1)$

- Navier-Stokes-Gl.:

$$\underbrace{\rho\underbrace{\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}+\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}\right)}_{\frac{d\underline{v}}{dt}}}_{\text{Trägheit}} = -\underline{\nabla} p + \underbrace{\eta\,\underline{\nabla}^2\underline{v}}_{\text{Reibung!}} + \underbrace{\rho\,\underline{b}}_{\text{Volumenkraftdichte}} \qquad (5.4)$$

p … Druck

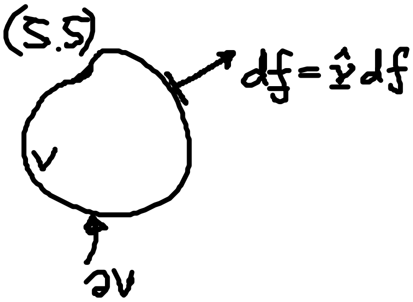
η … Scherviskosität

Bsp: $\underline{b}=\underline{g}$ … Gravitation, elektr./magn. Felder

- Umschreibung: Spannungstensor $\underline{\underline{T}}$, in Komp. T_{ij}, $i,j = 1\dots3$

$\longrightarrow$ Oberflächenkraft auf Flüssigkeitsvolumen:

$$\boxed{F_{O_i} = \int_{\partial V} T_{ij}\, df_j \overset{\text{Gauß}}{=} \int_V \nabla_j T_{ij}\, d^3x = \int_V (\operatorname{div}\underline{\underline{T}})_i\, d^3x} \qquad (5.5)$$



o.B.: $$\boxed{T_{ij} = \underbrace{-p\,\delta_{ij}}_{(1)} + \underbrace{2\eta A_{ij}}_{(2)}} \qquad (5.6)$$

… beschreibt innere Kräfte in Flüssigkeit

(1) $\underline{F}_O = -\int p\, d\underline{f}$, $\quad p\, d\underline{f} \parallel d\underline{f}$! … keine Schubspannung ($\perp d\underline{f}$)

$= -\int \underline{\nabla} p\, d^3x$

$\nabla_j(p\,\delta_{ij}) = \nabla_i p$

s. Gl. (5.4)

(2) Newtonsche Flüssigkeit:

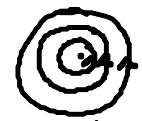
dissipativer Anteil von $T_{ij} \sim A_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$ … Scherrate $\quad (5.7)$

(i) $2\eta A_{ij}$ … für isotrope Flüssigkeiten

[mehr Terme für komplexe, anisotrope Flüssig.]

(ii) $W_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j - \nabla_j v_i) \longrightarrow \omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} W_{jk}$ (5.8)

$\longrightarrow \underline{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\underline{v}$



Vortex! kein Beitrag zur Dissipation

mit $\nabla_j T_{ij} \overset{(5.7)}{\underset{(5.6)}{=}} \eta \nabla_j (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \underset{=0}{\overset{\nabla_k v_k}{=}} \eta \nabla^2 v_i$

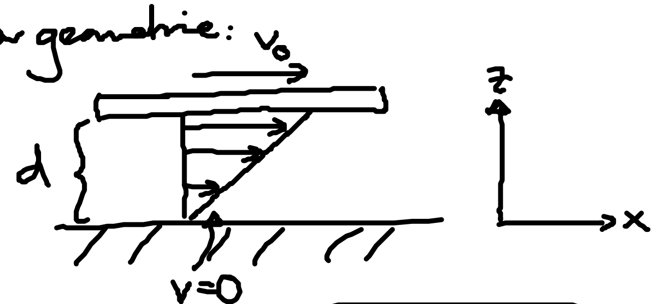
(5.4) $\Longrightarrow$ $\boxed{\rho \frac{dv}{dt} = \mathrm{div}\,\underline{\underline{T}} + \rho\,\underline{b}}$ (5.9)

… Impulserhaltung für kontinuierliche Medien

• $\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}$ … Nichtlinearität! → Chaos, Turbulenz

5.1.2 Stationäre Lösungen

• Schergeometrie:



$\left.\begin{array}{l} \underline{b}=0 \\ p=p_0 \end{array}\right\} \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial t}=0$ $\boxed{\underline{v} = v(z)\,\underline{e}_x = v_0 \frac{z}{d}\,\underline{e}_x}$ (5.10)

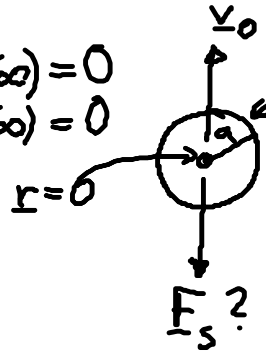
$\rightarrow \nabla^2 v = 0$

$\longrightarrow$ $\boxed{T_{xz} = \eta \frac{\partial v(z)}{\partial z} = \eta \frac{v_0}{d}}$ (5.11)

$\longrightarrow$ Messe η!

• Stokessche Reibung: (1) Translation: $\longrightarrow$ Einstein: N_A

$\longrightarrow$ Millikan: e



$\underline{v}(\infty)=0$

$p(\infty)=0$

$\underline{v}(\underline{r}_K)=\underline{v}_0$ ... haftende Randbedingung

(1) $\frac{\partial v}{\partial t}=0$

(2) $\underline{b}=0$

(3) Annahme:
$\underline{v}\cdot\nabla\underline{v} \ll -\nabla p+\eta\nabla^2\underline{v}$

a.B.:

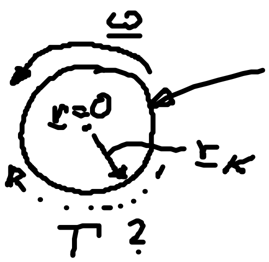
$$\boxed{\begin{aligned} v_i(\underline{r}) &= \left[\frac{3}{4}\frac{a}{r}\left(\delta_{ij}+\frac{r_i r_j}{r^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(1-3\frac{r_i r_j}{r^2}\right)\right]v_{0j} \\ p(\underline{r}) &= \frac{3}{2}\eta\frac{a}{r^2}\,\underline{r}\cdot\underline{v}_0 \end{aligned}} \quad (5.12)$$

$\Longrightarrow$ Stokessche Reibungskraft auf Kugel:

$$\boxed{\underline{F}_s=\int_{\partial V_K}\underline{\underline{T}}\,df=-6\pi\eta a\,\underline{v}_0} \quad (5.13)$$

$\longrightarrow$ Messe η

(2) Rotation



$\underline{v}(\infty)=0$

$\underline{v}(\underline{r}_K)=\underline{\omega}\times\underline{r}_K \Longleftrightarrow$

Wirbelfeld

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{v} &= \left(\frac{a}{r}\right)^3\underline{\omega}\times\underline{r} \\ p &= ? \end{aligned}} \quad (5.14)$$

$$\longrightarrow \boxed{\underline{T}=\int_{\partial V_K}\underline{r}_K\times\underline{\underline{T}}\,df=-8\pi\eta a^3\,\underline{\omega}} \quad (5.15)$$

... viskoses Drehmoment