1 Theoretische Physik V : Quantenmechanik II

Übungen: Julia Kabuß
Wassilij Kopylov
Marten Richter

VL-Beginn 08:30 Di, Do

ÜA-Abgabe spätestens Do 8^{25} in der Vorlesung

→ erste ÜA: 2 Wochen Zeit, dann wöchentlich

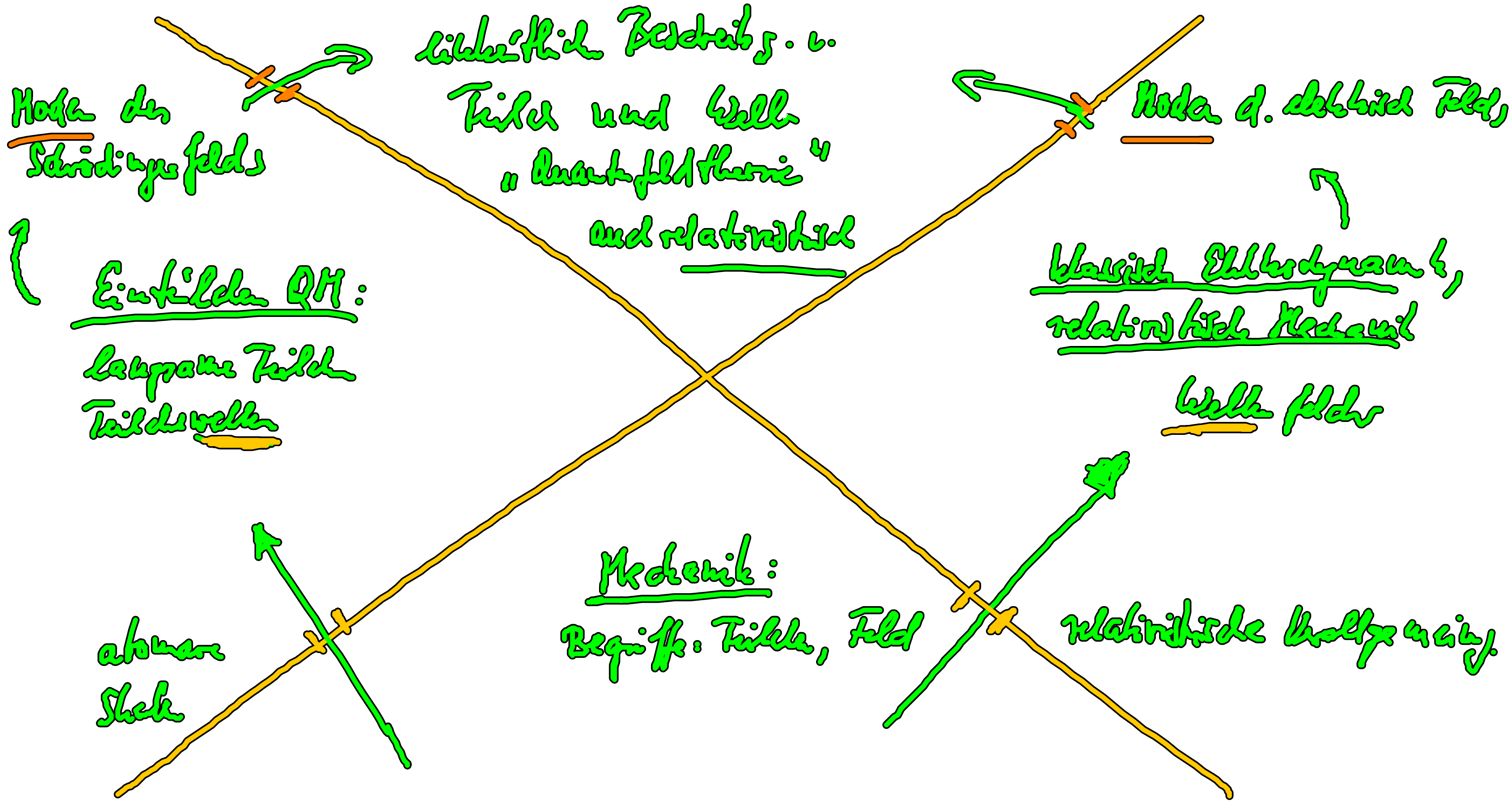
Scheinkriterium: Übungsaufgabe 50% Punkte

Sprechstunde A. K. $13-14^{00}$ Dienstag

I Ziel der Vorlesung, Wiederholung

1. „Struktur" Theoretische Physik

Quantenwelt Standardmodell klassische Welt



relativistische Energie-Impuls beziehung

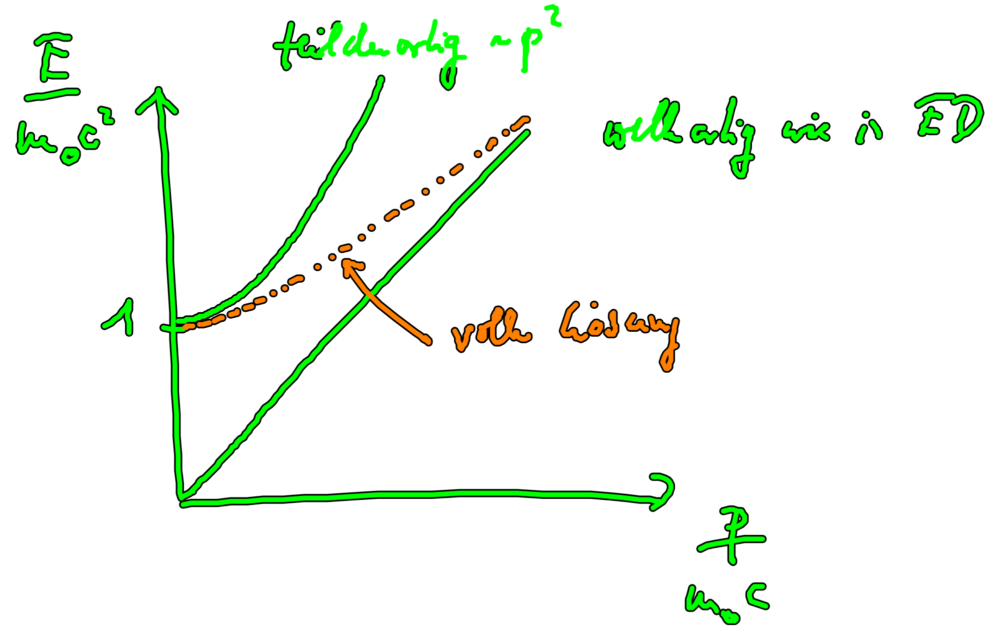
$$E(p) = \left(m_0^2 c^4 + c^2 p^2\right)^{1/2} \approx \begin{cases} m_0 c^2 + \dfrac{p^2}{2m_0} & \text{für } p \ll m_0 c \\ cp & \text{für } p \gg m_0 c \end{cases}$$

klassisch $\sim p^2$

ultrarelativistisch $\sim p$

Impuls p vergleiche
mit Ruheimpuls $m_0 c$

die Gleichung interpoliert zwischen 2 Verhalten (Dispersion):



$$\left.\begin{array}{l} E = \hbar\omega \\ p = \hbar k \end{array}\right\} \quad \text{Licht: } \omega = ck \;\hat{=}\; E = cp$$

echtes Verständnis d. Welle – Teilchen Dualismus nur im Rahmen einer relativistischen Theorie

2. Historische Kommentare

QM I: M. Planck — Wirkungsquantum, schw. Strahler

A. Einstein — Lichtquantenhypothese, $\boxed{\text{Quantenoptik}}$

N. Bohr, A. Sommerfeld — halbklassische Theorie, $\boxed{\text{Atommodelle}}$

W. Heisenberg — Matrizenmechanik — $\boxed{\text{Feldquantisierung}}$

E. Schrödinger — Wellenmechanik — $\boxed{\text{Verschränkung}}$

W. Pauli — $\boxed{\text{Spin-Statistik Theorem}}$ — Spin

P. Dirac (1902 – 1984) — abstrakte Formulierung

O. Klein / W. Gordon — $\boxed{\text{relativistische Wellengl. f. Spin } 1/2}$ Spin 0

E. Wigner (1902 – 1995) — $\boxed{\text{Symmetrien relativistischer Quantenfeldtheorie}}$ Kettenreaktion

V. Weißkopf (1908–2002) Linienbreite d. Atomspektren

W. Lamb (1913–2008) H-Feinstruktur, Lambshift

R. Glauber (1925 geb.) Zeitlich Strahlungsfeld

R. Feynman (1918–1988) Quantenelektrodynamik — Feynmangraphen

P. Higgs (1929 geb.) Masse d. Symmetriebrechung.

D. R. Hartree (1897–1958)
W. A. Fock (1898–1974) Elektronenstruktur d. Atome

Hartree–Fock Gleichungen

3. Stichworte zum Inhalt

- einheitliche Beschreibg. Teilchen + Feld im relativistischen und nichtrelativistischen Bereich
- Moden eines Quantenfelds: Elektron, Photon, Phonon ... (Methode 2. Quantisierung)
- Vielteilchenzustände, Verschränkung und Teleportation
- offene dissipative Quantensysteme, insbesondere Quantenoptik
- relativistische Wellengleichungen
- Streutheorie, Feynmandiagramme, Higgsmechanismus

4. Stand bisherige QT

a) Zustand eines Systems $\quad |\Psi(t)\rangle \quad$ (ket)

Superpositionsprinzip v. mgl. Zuständen

äquivalent Beschreibung $\quad \langle\Psi(t)| \quad$ (bra)

∃ Skalarprodukt $\quad \langle\Psi_1|\Psi_2\rangle$

speziell: $\quad \langle\Psi|\Psi\rangle = 1 \quad$ (Wahrscheinlichkeit)

$$\underbrace{|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)\,|n\rangle}$$

Aufspannen eines Zustands

Entwicklungskoeffizient:

$$c_n = \langle n|\Psi\rangle$$

$$\underbrace{\underline{A}\,|n\rangle = a_n\,|n\rangle}$$

Eigenwertproblem f. hermitesche Operatoren

$\{|n\rangle\}$: vollständig

$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ orthonormiert

Lsg. d. Vertauschungsrelationen

Ortsraum: $\langle \vec{r}|\Psi\rangle \equiv \Psi(\vec{r},t)$

Eigenzustand Ortsoperators $\quad \psi(\vec{r},t) = \sum_n c_n \underbrace{\langle r|n\rangle}_{\varphi_n(\vec{r})}$

b) Messungen

(i) eine Messung an $|\psi\rangle$: a_n : mgl. Messwerte, mit Wahrsch.

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\text{Messg.}]{} |n\rangle \qquad |c_n|^2$$

(ii) viele Messungen

$$\langle \underline{A} \rangle = \langle \psi | \underline{A} | \psi \rangle = \sum_n |c_n|^2 a_n \quad \text{Mittelwert}$$

$$\langle (\Delta \underline{A})^2 \rangle = \langle \underline{A}^2 \rangle - \langle \underline{A} \rangle^2 \quad \text{Abweichg.}$$

(iii) verschiedene Observable $\underline{A}, \underline{B}$

allg. Unschärfe $\quad \Delta A = \sqrt{\langle \Delta \underline{A}^2 \rangle}$

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} \underbrace{|\langle [\underline{A}, \underline{B}] \rangle|}_{}$$

ungestört messbar wenn $[\ ,\ ] = 0$

c) Darstellung v. Operatoren

Identität $\underline{1} = \sum_n |n\rangle\langle n|$

$$\underset{\underline{1}}{\uparrow}\underline{B}\underset{\underline{1}}{\uparrow} = \sum_{n,m} |n\rangle \underbrace{\langle n|B|m\rangle}_{B_{nm}} \langle m| = \sum_{n,m} B_{nm} \underbrace{|n\rangle\langle m|}_{\text{Flipoperator}}$$

d) Dynamik

(i) Schrödingergl. $\quad i\hbar\,\partial_t |\psi\rangle = \underline{H}\,|\psi\rangle$

(ii) Ehrenfestgleichung: Gleichg. f. d. Mittelwert

$$\underbrace{i\hbar\frac{d}{dt}\langle\underline{A}\rangle}_{\text{zeitliche Veränderg. von } \langle\underline{A}\rangle} = \langle\underbrace{[\underline{A},\underline{H}]}_{\neq 0 \text{ führt zu Dynamik}}\rangle$$

$\underline{A}$ ohne explizite Zeitabhängigkeit

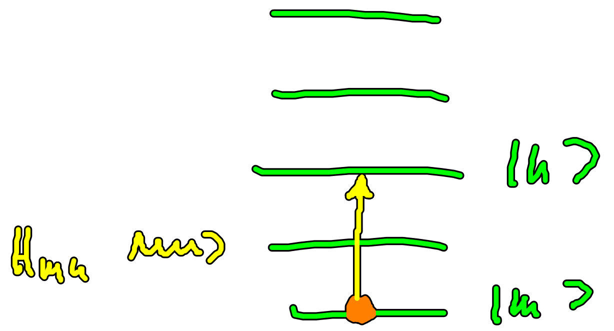
$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)\,|n\rangle$$

Dynamik in $c_n(t)$

durch Einsetzen in Schrödingergl. v. $|\psi(t)\rangle$

$$\dot{c}_m(t) = -\frac{i}{\hbar}\sum_n \langle m|\underline{H}|n\rangle\, c_n(t)$$

Interpretation $\quad c_m^*(t)\, c_m(t) \;\hat{=}\;$ Wahrscheinlichkeit System in $|m\rangle$ zu finden



$c_n^*(t)\, c_m(t) \;\hat{=}\;$ Übergangs-wahrscheinlichkeitsamplitude

e/ Bsp. harmonischer Oszillator

$$H(x,p) \;\longrightarrow\; \underline{H} = \frac{\underline{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \underline{x}^2$$

klass. Mechanik

$$\underbrace{+ \text{ Vertauschungsrelation } \; [x_i, p_j] = i\hbar\,\delta_{ij}}_{\text{damit Problem definiert + kann gelöst werden}}$$

Lösg.: neue Operatoren a^+, a linear aus $\underline{x}, \underline{P}$

a^+: Erzeuger, a: Vernichter eines Quants

$$\underline{H} = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) \quad \text{mit} \quad \underbrace{[a, a^+]}_{aa^+ - a^+a} = 1 \;\leftarrow \text{Bosonen}$$

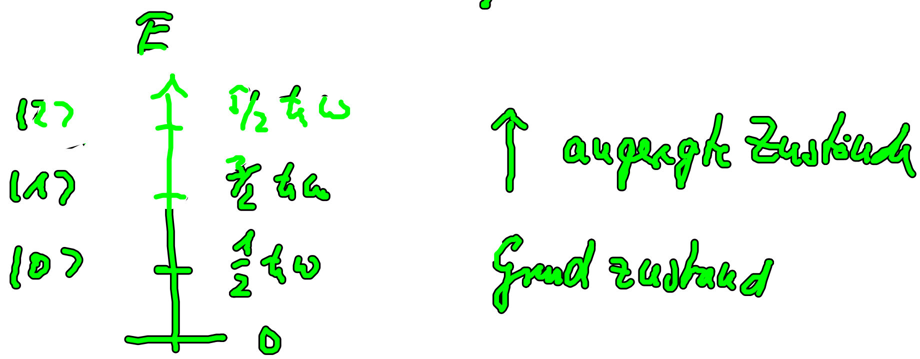
$+$ später f. Fermionen

Eigenwertproblem

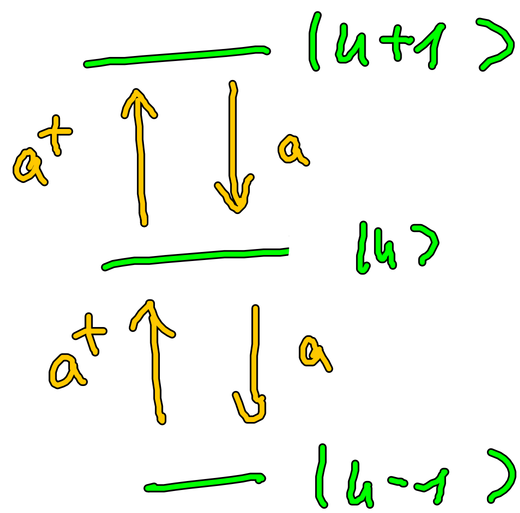
$\underline{H}|n\rangle = \varepsilon_n |n\rangle$

Energie: $\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

Zustände: $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(a^+\right)^n |0\rangle$



Leiteroperatoren - Bedeutung:



$a^+|n\rangle = \sqrt{(n+1)}\,|n+1\rangle$

$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$