f) Bilder

Schrödingerbild	Heisenbergbild
$\lvert\psi(t)\rangle$ trägt Zeitdynamik	$\underline{O}(t)$ trägt Zeitdynamik
$\underline{O}$ Observable nicht zeitabhängig (höchstens explizit, selten)	$\lvert\psi\rangle$ nicht zeitabhängig

(beide Bilder äquivalente Beschreibungen, Schreibweise $\dot{X} = \frac{d}{dt} X$, Index H, S f. Bilder)

$$i\hbar\, |\dot{\psi}_S(t)\rangle = \underline{H}_S\, |\psi_S\rangle \qquad i\hbar\, \dot{\underline{O}}_H(t) = [\underline{O}_H, \underline{H}_H] + i\hbar\, \underbrace{\partial_t \underline{O}_H}_{\text{seltene explizite Zeitabhängigkeit}}$$

$$\langle \underline{O} \rangle = \langle \psi_S(t) | \underline{O}_S | \psi_S(t) \rangle \hat{=} \langle \psi_H | \underline{O}_H(t) | \psi_H \rangle$$

Umrechnung zwischen Bildern:

$$|\psi_S(t)\rangle = \underline{U}(t, t_0)\, |\psi_S(t_0)\rangle$$

Ansatz — Zeitentwicklungsoperator — Anfangswert $|\psi_S\rangle$

einsetzen in Schrödingergl. im Diracbild

$$i\hbar\, \dot{\underline{U}}(t, t_0) = \underline{H}_S\, \underline{U}(t, t_0)$$

$\underline{O}_H(t) = \underline{U}^{-1}(t,t_0)\,\underline{O}_S\,\underline{U}(t_0,t)$

$\underline{U}$ ist ein unitärer Operator $\quad \underline{U}^\dagger = \underline{U}^{-1}$

II Quantisierung freier Wellenfelder

1.) Motivation

a) Quantentheorie d. elektromagnetischen Felds (Photon)

b) Welle-Teilchen Dualismus aufheben in einer korrekten mathematischen Beschreibg.

c) relativistische Beschreibung

Beispiele: $\vec{A}, \phi(\vec{r},t)$, $\quad \vec{u}(\vec{r},t)$, $\quad \psi(\vec{r},t)$

Photon $\quad$ Phonon $\quad$ Schrödingerteilchen

wird „zweitquantisiert" eine einheitliche Beschreibung für alle Felder geben

2) Allgemeines Vorgehen zur Quantisierg. v. Wellenfeldern

Schema:

a) Lagrangetheorie f. klassische Feld $\psi_i(\vec r,t)$ „i-te Feld"

b) Definition d. Feldimpulses $\Pi_{\psi_i}(\vec r,t)$

c) Übergang zu Operatoren $\underline{\psi}_i$, $\underline{\Pi}_{\psi_i}$

d) Einführung v. Vertauschungsrelationen $[\underline{\psi}_i , \underline{\Pi}_j] = ?$

e) Aufstellen d. $\underline{H}$ - Operators

f) Bewegungsgleichungen f. Operatoren $\dot{\underline{\psi}}_i = \ldots$

g) Entwicklung v. $\underline{\psi}_i$ nach Feldmoden $\underline{\psi}_i = \sum_\lambda \varphi_\lambda(\vec r)\, \underline{a}_\lambda(t)$

h) Lösung v. dynamische Operatorgleichungen und Eigenwertprobleme

nichts anders als QM I :

$$\vec r, \vec p \longrightarrow \underline{\vec r}, \underline{\vec p} \longrightarrow [x_i, p_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$$

$$\checkmark \quad \langle \underline{O} \rangle \leftarrow \dot{\underline{O}} = \frac{i}{\hbar}[\underline{H},\underline{O}] \longleftarrow \underline{H} = \underline{H}(\underline{\vec r}, \underline{\vec p})$$

Konkret erläutern + Bsp Schrödingerfeld

a) Lagrangetechnik

Lagrangegleichungen f. Felder $\quad L = \int d^3r\, \mathcal{L}$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} - \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{i/x^\mu}} = 0}$$

Lagrangegleichungen f. Felder

$x^\mu = (t, x, y, z)$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

(Teilchen)

$$X_{/x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} X$$

<u>Beispiel</u> Schrödingerfeld $\psi(\vec{r},t)$, $\psi^*(\vec{r},t)$

$\mathcal{L} = \,?$ „you have to fiddle around"

so daß richtige Schrödingergleichung sollte entstehen

und $\mathcal{L}$ dient dann dazu Π_ψ zu ermitteln!

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi\right) - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{e=1}^{3} \psi^*_{/x^e}\, \psi_{/x^e} - U(\vec{r},t)\,\psi^*\psi$$

„$T - V$"

zeige, daß Schrödingergleichg. entsteht! $\{\psi_i\} = (\psi, \psi^*)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = \frac{i\hbar}{2}\dot{\psi} - U\psi$$

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*_{,x^\mu}} = \underbrace{-\frac{i\hbar}{2}\dot{\psi}}_{x^0 = t} - \frac{\hbar^2}{2m}\underbrace{\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^k}}_{\mu = 1,2,3 \hat{=} k}\sum_{\ell=1}^{3}\delta_{\ell k}\,\psi_{,k\ell}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*}$$

$$i\hbar\,\dot{\psi}(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\underbrace{\sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}}_{\Delta}\psi(\vec{r},t) + U(\vec{r},t)\,\psi(\vec{r},t)$$

Schrödingergl. ist okay ✓

b) Impuls

Feldimpuls variable

$$\boxed{\Pi_{\psi_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i}}$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Beispiel

$$\Pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{i\hbar}{2}\psi^*$$

offensichtlich bilden ψ, ψ^* analog zu x, p_x kanonisch konjugierte Variable

c/ Feldoperatoren

$$\psi_i \to \underline{\psi}_i \quad , \quad \Pi_{\psi_i} \to \underline{\Pi}_{\psi_i}$$

$$\psi_i^* \to \underline{\psi}_i^+$$

Beispiel $\underline{\Pi}_\psi = \underset{(2)}{\underline{i\hbar}}\, \underline{\psi}^+(\vec{r},t)$

gewisse Freiheit, muß später konsistent gewählt.

d/ Vertauschungsregeln

Erinnerung: $[x_i, p_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$

verschiedene Felder vertauschen

Verallgemeinern: $\left[\underline{\psi}_i(\vec{r},\underline{t}), \underline{\Pi}_j(\vec{r}\,',\underline{t})\right]_\pm = i\hbar\,\delta_{ij}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

gleichzeitiger Kommutator!

verschiedene Orte, verschiedene Felder

$\vec{r}$ ist kontinuierlich

$$[A,B]_\pm = AB \pm BA$$

halbzahliger Spin

ganzzahliger Spin

„Oft reinbasteln, damit konsistente Formulierung erfolgt"

Beispiel

$$\left[\underline{\psi}(\vec{r},t), \underline{\psi}^+(\vec{r}\,',t)\right]_+ = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

e) Hamiltonoperator

$$\underline{H} = \int d^3r\, \mathcal{H} = \int d^3r \left(\sum_i \underline{\dot{\psi}_i \Pi_i} - \underline{\mathcal{L}} \right)$$

(früher: $H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$ zur Eineng.

$H(q_i, p_i)$)

Beispiel

$$\mathcal{H} = \dot{\psi} \frac{i\hbar}{2} \psi^* - \dot{\psi}^* \frac{i\hbar}{2} \psi - \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi\right)$$

$$+ \frac{\hbar^2}{2m} \sum_l \frac{\partial \psi^*}{\partial x_l} \frac{\partial \psi}{\partial x_l} + u\, \psi^* \psi$$

partielle Integration, Randterm 0 → hinüberziehen

$$H = \int d^3r\, \psi^*(\vec{r},t)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + u(\vec{r})\right)\psi(\vec{r},t)$$

$$\boxed{\underline{H} = \int d^3r\, \underline{\psi}^+(\vec{r},t)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + u(\vec{r})\right)\underline{\psi}(\vec{r},t)}$$

zweitquantisierter Schrödingerfeld Hamiltonian

Regel : $H^{(1)} = H^{(1)}(\vec{r}, \vec{p})$ ← 1. Quantisierung

$$H^{(2)} = \int d^3r \; \underline{\Psi}^+(\vec{r},t) \, H_0^{(1)}\left(\vec{r}, \vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_r\right) \underline{\Psi}(\vec{r},t)$$

f) Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \underline{\Psi}_i(\vec{r},t) = \frac{i}{\hbar}\left[\underline{H}, \underline{\Psi}_i\right] + \left(\frac{\partial \underline{\Psi}_i(\vec{r},t)}{\partial t}\right)_{\text{explizit}}$$

Heisenberggleichung zur Beschreibung d. Dynamik

Beispiel : $\dot{U} \; A$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \underline{\Psi}(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \underline{\Psi}(\vec{r},t) + U(\vec{r},t) \underline{\Psi}(\vec{r},t)$$