$\underline{\psi}^+(\vec r,t)$, $\underline{\psi}(\vec r,t)$ eingeführt „Heisenberg-Feldoperatoren"

g) Entwicklung nach Feldmoden

- Ziel: Teilchen + Felder gemeinsam als Anregungen v. Quantenfeldern zu verstehen:

  Maxwellfeld → Photonen

  Schrödingerteilchen → elektronische Anregungen

  Schallfeld → Phononen

- dazu: Feldoperatoren nach vollständigem System von Eigenfunktionen entwickeln

$$\underline{\psi}_i(\vec r,t) = \sum_\mu \underline{a}_{i\mu}(t)\, u_{i\mu}(\vec r)$$

Zeitabhängige Koeffizienten (Operatoren)

vollständiges System für i-tes Feld, Quantenzahlen μ („Modenindex": μ)

<u>Bsp</u>: Schrödingerfeld

$$\underline{H}_0^{(1)} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

hat die Eigenfunktionen $u_{\vec{k},m_s}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{\chi}^{\,k}_{m_s}$

$\mu \hat{=} \vec{k}, m_s$ Normierg. $\pm\frac{1}{2}$

stellt ein vollständiges System dar (mit Spin)

- damit man mit den neuen Operator rechnen kann:

a) $\underbrace{\text{Vertauschungsrelation}}$ b) $\underbrace{\text{Hamiltonian}}$

ÜA: $[a_{i\mu}(t), a^+_{j\mu'}]_{\pm} = \delta_{ij}\delta_{\mu\mu'}$

Die Vertauschungsrelation entsprechen denen des harmonischen Oszillators

$$\underline{H}_0^{(2)} = \int d^3r\, \Psi^+(\vec{r},t)\, H_0^{(1)}\, \Psi(\vec{r},t)$$

$$\underline{H}^{(2)} = \underline{H}_0^{(2)} + \underline{H}_{WW}^{(2)}$$

diagonal in QZ μ leichtes Problem

„schwer"

$$\underline{H}_0^{(2)} = \sum_{i\mu}\sum_{j\mu'} \underbrace{\int d^3r\, u^*_{i\mu}(\vec{r})\, \underline{H}_0^{(1)}\, u_{j\mu'}(\vec{r})}\; a^+_{i\mu}\, a_{j\mu'}$$

$$\underline{H}_0^{(1)} u_{j\mu'}(\vec{r}) = \varepsilon_{j\mu'} u_{j\mu'}(\vec{r})$$

ist exakt bekanntes Problem

$$\boxed{\underline{H}_0^{(2)} = \sum_{i\mu} \varepsilon_{i\mu} \, a_{i\mu}^{+}(t) \, a_{i\mu}(t)}$$

Die zweitquantisierte Version von $\underline{H}$ sieht aus wie harmonisches Oszillatorproblem (H + Vertauschungsrelation)

<u>1. Beispiel</u> : freies skalares Schrödingerfeld

$$\underline{\Psi}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}(t) \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}}$$

$$H_0^{(2)} = \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a_k^{+}(t) \, a_k(t)$$

<u>2. Beispiel</u> : $a^{+}(t)$ → Dynamik f. eine Mode ansehen

Heisenbergbild

$$i\hbar \dot{a}^{+} = [a^{+}, H]_{-} + \cancel{\left(\frac{\partial a^{+}}{\partial t}\right)_{\text{explizit}}}$$

immer Kommutator

$$= \left[a^+ ,\ \hbar\omega\left(a^+a + \tfrac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \hbar\omega\left(a^+a^+a - a^+\underbrace{aa^+}\right)$$

Kommutatorrelation: $aa^+ \pm a^+a = 1$

$$aa^+ = 1 \mp a^+a$$

$[\underline{\psi}, \underline{\psi}^+] \neq 0$

$[\underline{\psi}^{(+)}, \underline{\psi}^{(+)}] = 0$

$$= \hbar\omega\left(a^+a^+a - a^+\left(\underline{1} \mp a^+a\right)\right)$$

Fermion auch Null, denn

$$= -\underline{\hbar\omega a^+} + \hbar\omega\left(a^+a^+a \pm a^+a^+a\right)$$

$= 0$ f. Boson

$\underbrace{[a^{(+)}, a^{(+)}] = 0}$

$a^+a^+ + a^+a^+ = 0$

$a^+a^+ = -a^+a^+$

$\rightarrow a^+a^+ = 0$

$$= -\hbar\omega a^+$$

$$\boxed{\dot{a}^+ = i\omega a^+}$$

$$\underline{a}^+(t) = e^{i\omega(t-t_0)}\,\underline{a}^+(t_0)$$

3) Umgang mit Operatordifferentialgleichungen

a) $\dot{\underline{X}} = \underline{Y}\,\underline{X} \qquad \underline{X} = \underline{X}(t)$

$$\underline{X}(t_0,t) = \underbrace{\underline{X}(t_0,t_0)}_{\underline{X}_0} + \int_{t_0}^{t} dt' \, \underline{Y}(t') \, \underline{X}(t_0,t')$$

A-Zeit

i-ter Fall $\underline{Y} = \text{constant}$

nullte Ordnung: $X^{(0)}(t_0,t) = X_0$

erste Ordnung: $X^{(1)}(t_0,t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} dt' \, Y X_0$

$$= X_0 + (t-t_0) Y X_0 = (1 + (t-t_0)Y) X_0$$

zweite Ordnung:

$$X^{(2)}(t_0,t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} dt_1 \, Y X_0 + \underline{\int_{t_0}^{t} dt_1} \, Y \underline{\int_{t_0}^{t_1} dt_2} \, Y X_0$$

$$= X_0 + Y(t-t_0) X_0 + Y^2 \underbrace{\frac{(t-t_0)^2}{2}}_{\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2} X_0$$

allgemein:

$$X^{(n)} = X^{(n-1)} + Y^n \frac{(t-t_0)^n}{n!} X_0$$

(Exponentialreihe!)

d.h. allgemeine Lösung ist:

$$\boxed{\underline{X}(t_0,t) = e^{\underline{Y}(t-t_0)}\, \underline{X}_0}$$

(ii) ter Fall : $Y = Y(t)$

nullte Ordnung : $\underline{X}^{(0)}(t_0,t) = \underline{X}_0$

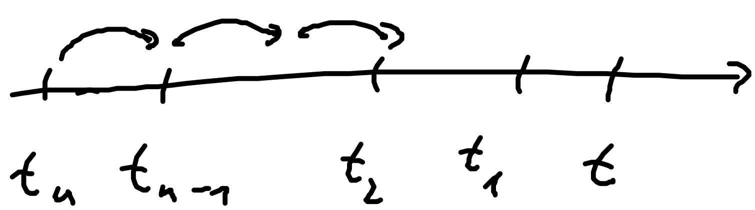
erste Ordnung : $\underline{X}^{(1)}(t_0,t) = \underline{X}_0 + \int_{t_0}^{t} dt_1\, \underline{Y}(t_1)\, \underline{X}_0$

zweite Ordnung : $\underline{X}^{(2)}(t_0,t) = X^{(1)} + \int_{t_0}^{t} dt_1\, \underline{Y}(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2\, \underline{Y}(t_2)$

man weiß nicht ob

$[Y(t_1), Y(t_2)] \neq 0$ i.a.

$$X^{(N)} = \left(1 + \sum_{n=1}^{N} \int_{t_0}^{t} dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, \underline{Y}(t_1) \cdots \underline{Y}(t_n)\right) X_0$$



Zeitordnung muß beachtet werden

i.a. Term für Term ausrechnen,

Später: Zeitordnungsoperator $\underline{X}(t) = \underline{\underline{T}}\, e^{\int_{t_0}^{t} dt' \, Y(t')} X_0$

(b) Dgl. der Form: $\underline{\dot{X}}(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Zahl}}}{\alpha}\, \underline{X}(t) + \underline{Y}(t)$

$$\underline{X}(t_0, t) = \underbrace{e^{\alpha(t-t_0)}\, \underline{X}_0}_{\substack{\text{homogene Lsg.} \\ \text{Fall} \\ (a, i)}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} dt' \, e^{\alpha(t-t')}\, \underline{Y}(t')}_{\text{inhomogene Lösung}}$$

Ansatz über Variation der Konstanten

4.) Quantisierung d. Schrödingerfelds

massive ($m \neq 0$) nichtrelativistische Bosonen / Fermionen

<u>Quantisierg.</u>: $H_0^{(2)} = \int d^3r \; \underline{\psi}^+(\vec{r}, t) \; \mathcal{H}_0^{(1)}(\vec{r}, \vec{p}\,) \; \underline{\psi}(\vec{r}, t)$

alle Probleme aus QM I

$\vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_r$

Vertauschg: $\quad [\underline{\psi}(\vec{r},t), \underline{\psi}^+(\vec{r}',t)] = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$

Moden: $\quad H_0^{(1)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + u(\vec{r})$ Teilchen im Potential

$$H_0^{(1)} \varphi_\lambda(\vec{r}) = \varepsilon_\lambda \varphi_\lambda(\vec{r}) \text{ ist gelöst}$$

$$\underline{H}_0^{(2)} = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda a_\lambda^+ a_\lambda \quad , \quad [a_\lambda, a_{\lambda'}^+]_{\underline{\pm}} = \delta_{\lambda\lambda'}$$

um Zustände zu formulieren muß Eigenwertproblem f. $\underline{a}$ formuliert werden

QMI: $\quad a_\lambda^+ a_\lambda |n_\lambda\rangle = n_\lambda |n_\lambda\rangle$

$|n_\lambda\rangle$: Besetzungszahlzustand; n_λ: Besetzungszahl

Bosonen:

$n_\lambda = 0, 1, 2, \dots$

$|0\rangle$, $\quad |n_\lambda\rangle = (n_\lambda!)^{-1/2} (a_\lambda^+)^n |0\rangle$

Vakuum

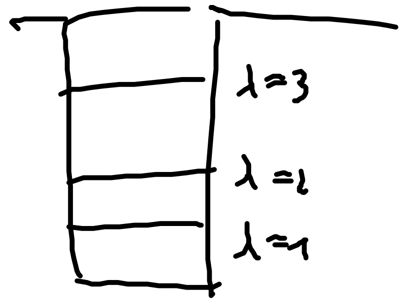
Fermionen

$n_\lambda = 0, 1$

$|0\rangle, \; |1\rangle = a_\lambda^+ |0\rangle$

QHI: alles ohne Index λ

QHI



Jeder dieser Zustände kann als 1 Oszillator interpretiert werden und mit n_λ Quanten besetzt werden.

<u>Viele Moden</u>:

$$\underline{H} = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda a_\lambda^+ a_\lambda$$

$$\underbrace{|n_1, n_2 \cdots \rangle}_{\text{alle Moden können besetzt werden}} = \prod_\lambda |n_\lambda\rangle \quad \text{ist Eigenzustand zu } H$$

$$\varepsilon_1 \underline{a_1^+ a_1 |n_1\rangle} |n_2\rangle \cdots |n_N\rangle = \varepsilon_1 \underline{n_1 |n_1\rangle} |n_2\rangle \cdots |n_N\rangle$$

$$\varepsilon_2 \underline{a_2^+ a_2} |n_1\rangle \underline{|n_2\rangle} \cdots |n_N\rangle = \underline{\varepsilon_2 n_2} |n_1\rangle \underline{|n_2\rangle} \cdots |n_N\rangle$$

$\vdots$ alles aufsummieren über alle Indizes

$\downarrow$

$$\sum_\lambda \varepsilon_\lambda a_\lambda^+ a_\lambda |n_1 n_2 \cdots \rangle = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda n_\lambda |n_1 n_2 \cdots \rangle$$

$$\underline{H} \, (u_1, u_2 \cdots) = E \, (u_1 \, u_2 \cdots)$$

Eigenfunktion sind Produktzustände und

Eigenenergien sind Summe über alle Energien der Einzelzustände.