$\underline{\Psi}^+(\vec r,t)$, $\underline{\Psi}(\vec r,t)$ eingeführt „Heisenberg-Feldoperatoren"

g) Entwicklung nach Feldmoden

- Ziel: Teilchen + Felder gemeinsam als Anregungen v. Quantenfeldern zu verstehen:

  Maxwellfeld → Photonen

  Schrödingerteilchen → elektronische Anregungen

  Schallfeld → Phononen

- dazu: Feldoperatoren nach vollständigem

  System von Eigenfunktionen entwickeln

$$\underline{\Psi}_i(\vec r,t) = \sum_\mu \underline{a}_{i\mu}(t)\, u_{i\mu}(\vec r)$$

Zeitabhängige Koeffizienten (Operatoren)

vollständiges System für i-tes Feld, Quantenzahlen μ („Modenindex": μ)

Bsp: Schrödingerfeld

$$\underline{H}_0^{(1)} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

hat die Eigenfunktionen $u_{\vec{k},m_s}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \chi^{\vec{k}}_{m_s}$

$\mu \hat{=} \vec{k}, m_s$ Normierg. $m_s = \pm\frac{1}{2}$

stellt ein vollständiges System dar (mit Spin)

- damit man mit den neuen Operator rechnen kann:

a/ Vertauschungsrelation b/ Hamiltonian

$$\text{d.h.}: [a_{i\mu}(t), a^+_{j\mu'}]_{\pm} = \delta_{ij}\delta_{\mu\mu'}$$

Die Vertauschungsrelation entsprechen denen des harmonischen Oszillators

$$\underline{H}_0^{(2)} = \int d^3r\, \Psi^+(\vec{r},t)\, \underline{H}_0^{(1)}\, \Psi(\vec{r},t)$$

$$\underline{H}^{(2)} = \underline{H}_0^{(2)} + \underline{H}_{WW}^{(2)}$$

diagonal in QZ$_\mu$ leichtes Problem

„schwer"

$$\underline{H}_0^{(2)} = \sum_{i\mu}\sum_{j\mu'} \underbrace{\int d^3r\, u^*_{i\mu}(\vec{r})\, \underline{H}_0^{(1)}\, u_{j\mu'}(\vec{r})}\, a^+_{i\mu}\, a_{j\mu'}$$

$$\underline{H}_0^{(1)} u_{j\mu'}(\vec{r}) = \varepsilon_{j\mu'} u_{j\mu'}(\vec{r})$$

ist exakt bekanntes Problem

$$\boxed{\underline{H_0}^{(2)} = \sum_{i\mu} \varepsilon_{i\mu}\, a^+_{i\mu}(t)\, a_{i\mu}(t)}$$

Die zweitquantisierte Version von H sieht aus wie harmonisches Oszillatorproblem (H + Vertauschungsrelation)

__1. Beispiel__ : freies skalares Schrödingerfeld

$$\underline{\Psi}(\vec r, t) = \sum_{\vec k} a_{\vec k}(t)\, \frac{e^{i\vec k\cdot\vec r}}{\sqrt{V}}$$

$$H_0^{(2)} = \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\, a^+_k(t)\, a_k(t)$$

__2. Beispiel__ : $a^+(t)$ → Dynamik f. einen Mode ausrechnen

Heisenbergbild

$$i\hbar\, \dot a^+ = \left[a^+_i, H\right]_- + \cancel{\left(\frac{\partial a^+}{\partial t}\right)_{\text{explizit}}}$$

immer Kommutator

$$= [a^+ , \hbar\omega(a^+a + \tfrac{1}{2})]$$

$$= \hbar\omega\,(a^+ a^+ a - a^+ \underbrace{a a^+})$$

Kommutatorrelation: $a a^+ \pm a^+ a = 1$

$$\underbrace{a a^+ = 1 \mp a^+ a}$$

$[\underline{\psi}, \underline{\psi}^+] \neq 0$

$[\underline{\psi}^{(+)}, \underline{\psi}^{(+)}] = 0$

$$= \hbar\omega\,(a^+ a^+ a - a^+ (\underline{1} \mp a^+ a))$$

Fermionen auch Null, denn

$$= -\hbar\underline{\omega a^+} + \hbar\omega\,(a^+ a^+ a \pm a^+ a^+ a)$$

$= 0$ f. Boson

$$\underbrace{[a^{(+)}, a^{(+)}] = 0}$$

$$a^+ a^+ + a^+ a^+ = 0$$

$$a^+ a^+ = - a^+ a^+$$

$$\to a^+ a^+ = 0$$

$$= -\hbar\omega a^+$$

$$\boxed{\dot{a}^+ = i\omega a^+}$$

$$\underline{a}^+(t) = e^{i\omega(t - t_0)}\,\underline{a}^+(t_0)$$

3) Umgang mit Operatordifferentialgleichungen

a) $\underline{\dot{X}} = \underline{Y}\,\underline{X} \qquad \underline{X} = \underline{X}(t)$

$$\underline{X}(t_0, t) = \underbrace{\underline{X}(t_0, t_0)}_{\underline{X}_0} + \int_{t_0}^{t} dt' \, \underline{Y}(t') \, \underline{X}(t_0, t')$$

A-Zeit

1-ter Fall: $\underline{Y} = \text{constant}$

nullte Ordnung: $X^{(0)}(t_0, t) = X_0$

erste Ordnung: $X^{(1)}(t_0, t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} dt' \, Y X_0$

$$= X_0 + (t - t_0) \, Y X_0 = (1 + (t - t_0) Y) X_0$$

zweite Ordnung:

$$X^{(2)}(t_0, t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} dt_1 \, Y X_0 + \int_{t_0}^{t} dt_1 \, Y \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \, Y X_0$$

$$= X_0 + Y (t - t_0) X_0 + Y^2 \underbrace{\frac{(t - t_0)^2}{2}}_{\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2} X_0$$

allgemein:

$$X^{(n)} = X^{(n-1)} + Y^n \frac{(t - t_0)^n}{n!} X_0$$

(Exponentialreihe!)

d.h. allgemeine Lösung ist:

$$\boxed{\underline{X}(t_0,t) = e^{\underline{Y}(t-t_0)}\,\underline{X}_0}$$

<u>(ii)ter Fall</u> : $Y = Y(t)$

nullte Ordnung: $\underline{X}^{(0)}(t_0,t) = \underline{X}_0$

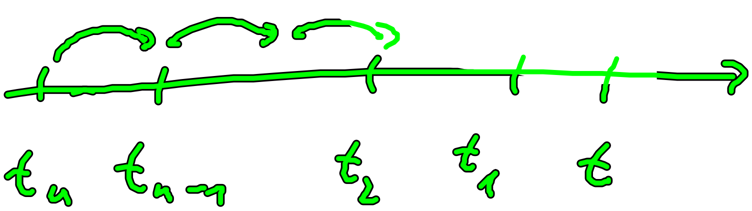
erste Ordnung: $\underline{X}^{(1)}(t_0,t) = \underline{X}_0 + \int_{t_0}^{t} dt_1\, \underline{Y}(t_1)\, \underline{X}_0$

zweite Ordnung: $\underline{X}^{(2)}(t_0,t) = X^{(1)} + \int_{t_0}^{t} dt_1\, \underline{Y}(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2\, \underline{Y}(t_2)$

man weiß nicht ob

$[Y(t_1), Y(t_2)] \neq 0$ i.a.

$$X^{(N)} = \left(1 + \sum_{n=1}^{N} \int_{t_0}^{t} dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, \underline{Y}(t_1) \cdots \underline{Y}(t_n)\right) X_0$$



Zeitordnung muss beachtet werden

i.a. Term für Term ausrechnen,

Später: Zeitordnungsoperator $\underline{X}(t) = \underline{\underline{T}}\, e^{\int_{t_0}^{t} dt' \, Y(t')} X_0$

(b) Dgl. der Form: $\dot{\underline{X}}(t) = \alpha \, \underline{X}(t) + \underline{Y}(t)$

α ← Zahl

$$\underline{X}(t_0, t) = \underbrace{e^{\alpha(t-t_0)} \underline{X}_0}_{\text{homogene Lsg.}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} dt' \, e^{\alpha(t-t')} \underline{Y}(t')}_{\text{inhomogene Lösung}}$$

(Fall a, i)

Ansatz über Variation der Konstanten

4.) Quantisierung d. Schrödingerfelds

massive ($m \neq 0$) nichtrelativistische Bosonen / Fermionen

Quantisierg.: $H_0^{(2)} = \int d^3r \, \underline{\Psi}^+(\vec{r}, t) \, H_0^{(1)}(\vec{r}, \vec{p}) \, \underline{\Psi}(\vec{r}, t)$

alle Probleme aus QM I

$\vec{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla_r$

Vertauschg: $\quad [\underline{\psi}(\vec r,t), \underline{\psi}^+(\vec r',t)] = \delta(\vec r - \vec r')$

Moden: $\quad H_0^{(1)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + u(\vec r)$ Teilchen im Potential

$$H_0^{(1)} \varphi_\lambda(\vec r) = \varepsilon_\lambda \varphi_\lambda(\vec r) \text{ ist gelöst}$$

$$\underline{H}_0^{(2)} = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda a_\lambda^+ a_\lambda \,, \quad [a_\lambda, a_{\lambda'}^+]_{\mp} = \delta_{\lambda\lambda'}$$

um Zustände zu formulieren muß Eigenwertproblem f. $\underline{a}$ formuliert werden

QMI: $\quad a_\lambda^+ a_\lambda |n_\lambda\rangle = n_\lambda |n_\lambda\rangle$

Besetzungszahlzustand $\quad$ Besetzungszahl

Bosonen:

$n_\lambda = 0, 1, 2, \dots$

$|0\rangle$, $\quad |n_\lambda\rangle = (n_\lambda!)^{-1/2} (a_\lambda^+)^n |0\rangle$

Vakuum

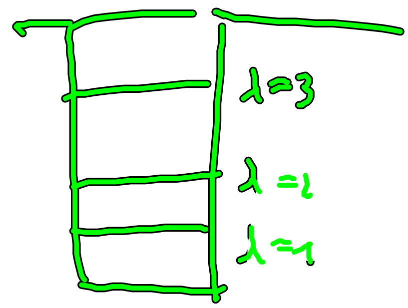
Fermionen

$n_\lambda = 0, 1$

$|0\rangle, \; |1\rangle = a_\lambda^+ |0\rangle$

QHI: alles ohne Index λ

QHI



Jeder dieser Zustand kann als 1 Oszillator interpretiert werden und mit a_λ Quant besetzt werden.

<u>Viele Mode</u>:

$$\underline{H} = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda a_\lambda^+ a_\lambda$$

$$\underbrace{|n_1, n_2 \cdots \rangle}_{\text{alle Mode können besetzt werden}} = \prod_\lambda |n_\lambda\rangle \quad \text{ist Eigenzustand zu } H$$

$$\varepsilon_1 \; a_1^+ a_1 \; |n_1\rangle |n_2\rangle \cdots |n_N\rangle = \varepsilon_1 n_1 |n_1\rangle |n_2\rangle \cdots |n_N\rangle$$

$$\varepsilon_2 \; a_2^+ a_2 \; |n_1\rangle |n_2\rangle \cdots |n_N\rangle = \varepsilon_2 n_2 |n_1\rangle |n_2\rangle \cdots |n_N\rangle$$

$\vdots$ alles aufsummieren über alle Indizes

$\rightsquigarrow$

$$\sum_\lambda \varepsilon_\lambda a_\lambda^+ a_\lambda \; |n_1 n_2 \cdots \rangle = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda n_\lambda \; |n_1 n_2 \cdots \rangle$$

$$\underline{H}\,(u_1, u_2 \cdots) = E\,(u_1\, u_2 \cdots)$$

Eigenfunktion sind Produktzustände und

Eigenenergien sind Summe über alle Energie der Einzelzustände.