Interpretation

Zustand mit N-Anregungen (Quanten) in Moden eines Felds:

$$|\psi_N\rangle = \sum_{n_1, n_2 \cdots} C_{n_1 n_2 \cdots} \underbrace{|n_1, n_2 \cdots\rangle}_{|n_1\rangle|n_2\rangle \cdots |n_\lambda\rangle \cdots} \quad \text{EF von } \underline{H_0^{(2)}} = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda a_\lambda^+ a_\lambda$$

$$|n_\lambda\rangle = \frac{(a^+)^{n_\lambda}}{(n_\lambda!)^{1/2}} |0_\lambda\rangle \quad (\text{Vakuum d. } \lambda\text{-Oszillators})$$

$\longrightarrow$ N Feldquanten in Mode λ zu $N = \sum_\lambda n_\lambda$ verteilt

quantisierte Felder + Teilchen sind in dieser Sprechweise nicht zu unterscheiden. (war unser Ziel)

$$a_\lambda^+ \, |n_1 \cdots n_\lambda \cdots\rangle = \begin{Bmatrix} \sqrt{n_\lambda + 1} \\ (-1)^m \sqrt{1 - n_\lambda} \end{Bmatrix} |n_1 \cdots \begin{Bmatrix} n_\lambda + 1 \\ 1 - n_\lambda \end{Bmatrix} \cdots\rangle \quad \begin{matrix} \text{Boson} \\ \text{Fermion} \end{matrix}$$

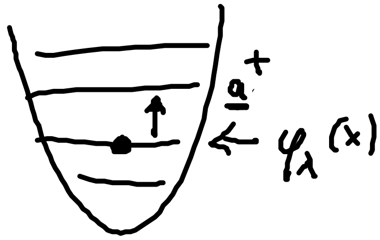
$$m = \sum_{i=1}^{\lambda-1} n_i$$

$$a_\lambda \, |n_1 \cdots n_\lambda \cdots\rangle = \begin{Bmatrix} \sqrt{n_\lambda} \\ (-1)^m \sqrt{n_\lambda} \end{Bmatrix} |n_1 \cdots \begin{Bmatrix} n_\lambda - 1 \\ 1 - n_\lambda \end{Bmatrix} \cdots\rangle \quad \begin{matrix} \text{Boson} \\ \text{Fermion} \end{matrix}$$

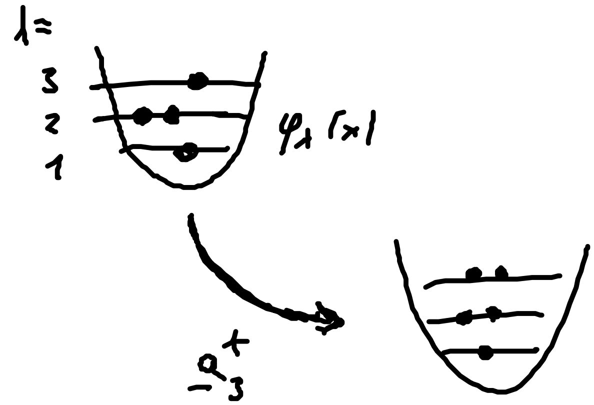
Erzeuger / Vernichter - Interpretation

QM I $\qquad\qquad\qquad$ QFT

$$\psi(x) = \sum_\lambda c_\lambda(t)\, \varphi_\lambda(x) \longrightarrow \underline{\psi} = \sum_\lambda \underline{a}_\lambda(t)\, \varphi_\lambda(x)$$



$\Longrightarrow$



$a, a^+ \ (x, p_x)$

1 Teilchen QM $\qquad\qquad$ **Vielteilchen QM**

- Jede Schrödingerteilchen kann als Anregung von Moden eines Quantenfelds verstanden werden.

- Teilchen + Felder der klassischen Physik sind einheitlich im Teilchenzahlformalismus $\{a_\lambda\}$ beschrieben.

- Jede QFT ist sofort eine Vielteilchentheorie
  bisher: noch keine WW zwischen Teilchen

- Interpretation d. Heisenberg operators:

$$|\Psi_N\rangle = \sum_{\{n_\lambda\}} C(\{n_\lambda\}) \prod_\lambda \frac{(a_\lambda^+)^{n_\lambda}}{\sqrt{n_\lambda!}} |0_\lambda\rangle$$

$$\Psi^+(\vec{r},t) = \sum_\lambda \varphi_\lambda^*(\vec{r})\, a_\lambda^+(t) \qquad \Big) \; \varphi_\mu(\vec{r}),\ \int d^3r$$

invers: $$a_\lambda^+(t) = \int d^3r\, \varphi_\lambda(\vec{r})\, \Psi^+(\vec{r},t)$$

einfach in $|\Psi_N\rangle$: $n_\lambda = 1$ f. 1 Quant pro Mode

$$|\Psi_N\rangle = \sum_{\{n_\lambda\}} C(\{n_\lambda\}) \prod_\lambda \int d^3r\, \varphi_\lambda(r)\, \underbrace{\Psi^+(\vec{r},t)\, |0\rangle}$$

$\Psi^+(r,t)$ erzeugt ein Teilchen am Ort $\vec{r}$, zur Zeit t mit der Amplitude $\varphi_\lambda(\vec{r})$.

5 Vielteilchenzustände d. Schrödingerfelds

5.1. Einteilchenzustand

identisch f. Bosonen u. Fermionen

$$|0, 0, \underset{\lambda_1}{1}, 0\rangle = a^+_{\lambda_1}|0\rangle \qquad |0\rangle = \prod_\lambda |0_\lambda\rangle$$

(a) normiert:

$$\langle 0| a_\lambda a^+_\lambda |0\rangle \overset{!}{=} 1$$

$$\langle 0| 1 \pm \underbrace{a^+_\lambda a_\lambda |0\rangle}_{0} = \langle 0|1|0\rangle = \underline{\underline{1}}$$

(b) Ortsraum $\qquad \langle \vec{r}|n\rangle = \varphi_n(\vec{r}) \quad$ (QM I)

$$\langle \vec{r}_1 | 0 \cdots 1 \cdots \rangle = \langle 0| \Psi(\vec{r}_1, t)\, a^+_{\lambda_1} |0\rangle =$$

Koordinate des einen Teilchens

$$\langle 0| \sum_{\lambda'} \varphi_{\lambda'}(\vec{r}_1)\, \underbrace{a_{\lambda'} a^+_{\lambda_1}}_{\delta_{\lambda_1\lambda'} \pm a^+_{\lambda_1} a_{\lambda'}} |0\rangle = \underline{\underline{\varphi_{\lambda_1}(\vec{r}_1)}}$$

$= 0$

Wellenfkt. an H_0

wenn Ort + Spin (QM I)

$$\varphi_{\lambda_1}(\vec{r}_1) \longrightarrow \vec{\chi}_{m_{s_1}}(\vec{s}_1)\, \varphi_{n_1}(\vec{r}_1)$$

$\lambda \to m_s, n \leftarrow$ Orts QZ: H-Atom QZ

Spin f. El. $\pm\frac{1}{2}$

5.2. Zweiteilchenzustand f. Fermionen

$$a^\dagger_{\lambda_1} a^\dagger_{\lambda_2} |0\rangle = |\cdots \underset{\lambda_1}{1} \cdots \underset{\lambda_2}{1}, 0\rangle$$

Versuch: $a^\dagger_{\lambda_1} a^\dagger_{\lambda_1} |0\rangle = - a^\dagger_{\lambda_1} a^\dagger_{\lambda_1} |0\rangle \rightarrow \equiv 0$

$$[a^\dagger_{\lambda_1}, a^\dagger_{\lambda_2}]_+ = 0$$

$\hookrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \rightarrow a^\dagger_{\lambda_1} a^\dagger_{\lambda_1} = - a^\dagger_{\lambda_1} a^\dagger_{\lambda_1}$

$\longrightarrow$ 2 Fermionen können nicht in denselben Zustand sein

(Paulprinzip) $\quad \lambda \rightarrow (m_s, n)$

(a) Normierung

$$\langle 0 | a_{\lambda_2} a_{\lambda_1} a^\dagger_{\lambda_1} a^\dagger_{\lambda_2} |0\rangle \overset{!}{=} 1$$

$$= \langle 0 | a_{\lambda_2} (1 - a^\dagger_{\lambda_1} a_{\lambda_1}) a^\dagger_{\lambda_2} |0\rangle$$

$$= \langle 0 | (1 - a^\dagger_{\lambda_2} a_{\lambda_2}) - a_{\lambda_2} a^\dagger_{\lambda_1} (\delta_{\lambda_1 \lambda_2} - a^\dagger_{\lambda_2} \underbrace{a_{\lambda_1}) |0\rangle}_{=0}$$

$$= \langle 0 | \, 1 - \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \left(\delta_{\lambda_1 \lambda_2} - a^+_{\lambda_1} a_{\lambda_2} \right) | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | \left(1 - \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \right) | 0 \rangle = 1 \text{ wenn } \underline{\underline{\lambda_1 \neq \lambda_2}}$$

(muß in 2 versch. QZ. sein)

(b) Ortsdarstellg.

$$|\vec r_1, \vec r_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}} \underline{\psi}^+(\vec r_1) \, \underline{\psi}^+(\vec r_2) \, |0\rangle$$

$$|\vec r_1 \dots \vec r_N \rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \psi^+(\vec r_1) \dots \psi^+(\vec r_N) \, |0\rangle$$

allg. N-Teilch zustand in Ket-schreibweise

$$| \dots 1, \dots 1, \dots \rangle = a^+_{\lambda_1} a^+_{\lambda_2} |0\rangle$$

$$\underbrace{\phi(\vec r_1, \vec r_2)}_{} = \langle \vec r_1, \vec r_2 | a^+_{\lambda_1} a^+_{\lambda_2} |0\rangle$$

2 Teilch zustand in Schrödingerwellenfkt.-darstellung

$$= \frac{1}{\sqrt 2} \langle 0 | \psi(\vec r_2) \psi(\vec r_1) \, a^+_{\lambda_1} a^+_{\lambda_2} |0\rangle$$

ÜA

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\underbrace{\varphi_{\lambda_1}(\vec{r}_1)\, \varphi_{\lambda_2}(\vec{r}_2)}_{\text{Produkt der Lösungen der jeweiligen Teilchen}} - \underbrace{\varphi_{\lambda_1}(\vec{r}_2)\, \varphi_{\lambda_2}(\vec{r}_1)}_{\text{garantiert Ununterscheidbarkeit}} \right)$$

$$\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\phi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$$

$$|\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2 = |\phi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)|^2 \text{ ist}$$

Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte die invariant gegen $\vec{r}_1 \leftrightarrow \vec{r}_2$ sein muß

→ fermionische Wellenfunktion sind antisymmetrisch gegen Koordinatentausch

$$\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2!}} \begin{vmatrix} \varphi_{\lambda_1}(\vec{r}_1) & \varphi_{\lambda_1}(\vec{r}_2) \\ \varphi_{\lambda_2}(\vec{r}_1) & \varphi_{\lambda_2}(\vec{r}_2) \end{vmatrix} \hat{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Spin + Ort gemeinsam

$$\lambda_i \to (\underset{\substack{\nearrow \\ \text{Ort}}}{n_i}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Spin}}}{m_{s_i}}) \qquad m_s \equiv s = \pm \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{\phi(\vec r_1, \vec s_1; \vec r_2, \vec s_2) = \frac{1}{\sqrt 2}\Big(\varphi_{n_1}(\vec r_1)\vec\chi_{s_1}(\vec s_1)\,\varphi_{n_2}(\vec r_2)\vec\chi_{s_2}(\vec s_2) - \varphi_{n_2}(\vec r_1)\vec\chi_{s_2}(\vec s_1)\,\varphi_{n_1}(\vec r_2)\chi_{s_1}(\vec s_2)\Big)}_{\text{allgemeinster 2 Teilchenzustand}}$$

<u>Spezialfälle</u>: $\underbrace{n_1 = n_2 = n}$:

$$\phi \to \frac{1}{\sqrt 2}\underbrace{\varphi_n(\vec r_1)\varphi_n(\vec r_2)}_{\text{symm. Ort}}\underbrace{\Big(\vec\chi_{s_1}(\vec s_1)\vec\chi_{s_2}(\vec s_2) - \chi_{s_2}(\vec s_1)\chi_{s_1}(\vec s_2)\Big)}_{\text{antisymm. Spin}}$$

$$s_1 = s_2 = s = m_s$$

$$\phi \to \frac{1}{\sqrt 2}\underbrace{\Big(\varphi_{n_1}(\vec r_1)\varphi_{n_2}(\vec r_2) - \varphi_{n_2}(\vec r_1)\varphi_{n_1}(\vec r_2)\Big)}_{\text{antisymm. Ort}}\underbrace{\vec\chi_s(\vec s_1)\vec\chi_s(\vec s_2)}_{\text{symm. Spin}}$$

m_s

<u>Beispiel</u>: die obere WF tritt beim He-Atom auf

2 Elektronen im Grundzustand:

$$2\times \varepsilon_{1s} \longrightarrow \text{Zustand } \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1s}(\vec r_1)\,\varphi_{1s}(\vec r_2)\left[\chi_{S_1}(s_1)\,\chi_{S_2}(s_2) - \chi_{S_2}(s_1)\,\chi_{S_1}(s_2)\right]}}$$

$\uparrow\downarrow$ 1s

c) Zwei Spins: Addition + Zustände

<u>Zustände</u>:

1.	$\uparrow$	$\uparrow$
2.	$\uparrow$	$\downarrow$
3.	$\downarrow$	$\uparrow$
4.	$\downarrow$	$\downarrow$

diese Zustände würden Basis in diesem Raum bilden
jeder Basisvektor kann als Linkomb. von $|i\rangle_1$, $|i\rangle_2$

$i = \uparrow, \downarrow$

$$\underbrace{|\psi\rangle}_{\text{Basis}} = \sum_{ij} a_{ij}\, |i\rangle_1\, |j\rangle_2$$

Zustände können auch Gesamtspin $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ (Spinoperatoren)

Vektor die Paulimatrizen enthalten

und Spinprojektion klassifiziert werden: $\underline{S}_z = \underline{S}_{z1} + \underline{S}_{z2}$

$$|\varphi\rangle = |S, M_S\rangle$$

$$\underline{\vec{S}}^2 |S, M_S\rangle = \hbar^2 S(S+1) |S, M_S\rangle$$

$$\underline{S}_z |S, M_S\rangle = \hbar M_S |S, M_S\rangle$$

$$\{S\} = 0, 1 \qquad \{M_S\} = 0, \pm 1$$