5.4. Zwei- und N-Teilchenzustand f. Bosonen

(ohne direkte Beweise)

Bosonen: $[a_{\lambda_1}, a^+_{\lambda_2}]_- = \delta_{\lambda_1 \lambda_2}$

Zweiteilchenzustand: $a^+_{\lambda_1} a^+_{\lambda_2} |0\rangle$

a) Ortsraum, kein Spin

$$\phi_B(\vec r_1, \vec r_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_{\lambda_1}(\vec r_1)\, \varphi_{\lambda_2}(\vec r_2) + \varphi_{\lambda_2}(\vec r_1)\, \varphi_{\lambda_1}(\vec r_2) \right)$$

Bosonen können sich im selben Zustand und an demselben „Ort" aufhalten. ($\phi_B(\vec r_1, \vec r_2 = \vec r_1) \neq 0$)

b) Verallgemeinerung auf N-Teilchen mit Spin $\vec x_i = (\vec r_i, \vec s_i)$

$$\phi_B(\vec x_1 \dots \vec x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \frac{1}{\sqrt{\prod_i^k N_i!}} \sum_{\substack{\text{alle} \\ \text{Permutationen } P \\ \text{von } (\vec x_i)}} P \left(\varphi_{\lambda_1}(\vec x_1)\, \varphi_{\lambda_2}(\vec x_2) \cdots \varphi_{\lambda_N}(\vec x_N) \right)$$

N-Teilchen $\longrightarrow$ $N!$

sind in ϕ_B $k < N$ verschiedene Orbitale besetzt so ist N_i die Teilchenzahl im i-ten Orbital

5.3. Interpretation

$\phi(\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_N)$ sei Vielteilchenwellenfunktion

⤵ $|\phi(\vec{x}_1 \cdots x_N)|^2$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte

Teilchen bei $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ usw zu finden

Teilchen in Mikrowelt können <u>nicht unterschieden</u> werden, weil <u>Wellenfunktion überlappen</u>

→ man darf kein Unterschied finden, wenn $\vec{x}_1 \leftrightarrow \vec{x}_2$ Vertauschg.
($\vec{x}_i \leftrightarrow \vec{x}_j$ i.a.)

$$\left| \phi(\vec{x}_1, \cdots \vec{x}_i, \vec{x}_j \cdots \vec{x}_N) \right|^2 = \left| \phi(\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_j, \vec{x}_i \cdots \vec{x}_N \right|^2$$

⤵ $$\phi(\cdots \vec{x}_i, \vec{x}_j \cdots) = \pm \phi(\cdots \vec{x}_j, \vec{x}_i \cdots)$$

⤵ es muß in Natur 2 Arten v. Teilchen geben

„+“ Bosonen : symmetrische WF gegen Teilchentausch

„−“ Fermionen : antisymm. WF gegen Teilchentausch

W. Pauli 1926 Spin-Statistik Theorem

halbzahliger Spin → Fermion (Fermistatistik)

ganzzahliger Spin → Boson (Bose Statistik)

5.6 Verschränkte Zustände zweier Fermionen

(oder „Wundersame Dinge der QM ...")

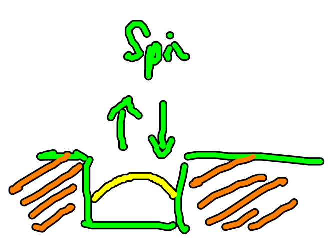
Motivation: Q-Information

2-Teilchen: $|\psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} \, |i\rangle_1 \, |j\rangle_2$

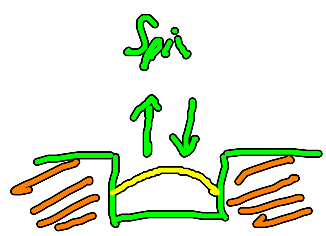
1. und 2. Teilchen in Zustand

$i,j = \uparrow, \downarrow$

jedes Teilchen (2) hat 2 Zustände



Quantenpunkt 1 (H_1)



Quantenpunkt 2 (H_2) in Festkörpern

oder 2 Photonen mit vertikaler + horizontaler

Polarisation $\uparrow$ $\rightarrow$

Der Gesamtzustand zweier Teilchen heißt verschränkt (entangled) wenn sich der Zustand <u>nicht</u> als einfacher Produktzustand von einer Wellenfunktion aus H_1 und WF aus H_2 schreiben läßt.

<u>Beispiel</u>: $|1, -1\rangle = |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2$

$\hat{=}$ Produkt aus System 1 und 2

$\rightarrow$ nicht verschränkt

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_1 \right)$$

ist Bsp. f. verschränkten Zustand.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\underset{1}{\downarrow} \; \underset{2}{\uparrow} + \underset{1}{\uparrow} \; \underset{2}{\downarrow} \right)$$

Messung, dann ist mit 50% rechts bzw links-Konfiguration zu erwarten,

$\Longrightarrow$ egal welche man mißt, die Messung an 1 legt sofort den Zustand in 2 fest!

Einstein: EPR-Paradox: „Spukhafte Fernwechselwirkung“

$\rightarrow$ QM ist nicht vollständig.

Schrödingers Katze: Illustration

6. Quantisierung d. freien elektromagnetischen Feldes

6.1. Feldquantisierung über Lagrangetechnik

allg. Quantisierung: $(a \rightarrow g)$ siehe Beginn II

a) Lagrangefunktion: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r},t) - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2(\vec{r},t)\right)$

$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$, $\quad \vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}\phi$

Felder über Potentiale definiert, im Vakuum $\phi = 0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

in Coulombeichung; betrachten bei uns Licht-Materie WW

richtige Maxwellgl. über Lagrangegleichungen f. Felder (ÜA)

b) Festlegg. d. Impulse: $\Pi_{A_x} = \partial_{\dot{A}_x}\mathcal{L} = \varepsilon_0 \dot{A}_x = -\varepsilon_0 E_x$

$\vec{A}$ - soll quantisiert werden $\qquad \dot{\vec{A}} = \partial_t \vec{A}$

kanonische Variable die quantisiert werden müssen sind $\vec{A}, \vec{E}$.

c) $\vec{A}, \vec{E}$ werden zu Operatoren $\underline{A}, \underline{E}$

d) Vertauschungsrelation:

$$\left[\underline{A}_l(\vec{r},t), \; \underline{E}_m(\vec{r}\,',t) \right] \underline{\simeq} \frac{i\hbar}{\varepsilon_0} \delta_{lm} \, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

$l, m = x, y, z$

diese Vertauschungsrelation ist noch nicht ganz richtig, weil sie die Bedingung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ nicht erfüllt.

Ergebnis vorweg: $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta_{lm} \rightarrow \underbrace{\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta_{lm} - \frac{1}{4\pi}\,\partial_l \partial_m \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{\delta_T^{lm}(\vec{r}-\vec{r}\,')}$

„transversale Deltafunktion"

Beweis (i) erster Term reicht nicht aus:

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \; e^{-i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \propto \vec{\nabla}\cdot\ \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

$$\underbrace{\sum_l \partial_{x_l}}_{\text{Divergenzbildung}} \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}$$

$$\sum_l \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{k}\ (-ik_l)\, e^{-i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')} \neq 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \neq 0$$

„Ansatz“

Versuch d. Korrektur

$$\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_l \partial_{x_l}}_{\vec{\nabla}\cdot} \left(\int d^3\vec{k}\, e^{-i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')} \left(\delta_{lm} - k_l k_m \underbrace{f(\vec{k})}_{\text{unbekannte Funktion}}\right)\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\sim \sum_l \int d^3\vec{k}\, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')} \left(-ik_l\,\delta_{lm} + i\,k_l^2 k_m f(\vec{k})\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\int d^3\vec{k}\, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')} \left(-ik_m + i\,k_m \underbrace{\sum_l k_l^2 f(\vec{k})}_{\overset{!}{=}1}\right) \overset{!}{=} 0$$

wenn $\vec{f}(\vec{k}) = \frac{1}{|\vec{k}|^2}$, so ist $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

Rücktrafo: über Fouriertrafo: $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{|\vec{k}|^2} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}|}$

$$\delta^{lm}_{T}(\vec{r}-\vec{r}\,') = \delta_{lm}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') - \frac{1}{4\pi}\,\partial_l\,\partial_m\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

e) **Hamiltondichte und Operator:**

$$\mathcal{H} = \dot{\vec{A}}\cdot\vec{E}\,\varepsilon_0 - \mathcal{L}$$

$$H = \int d^3r \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\,\vec{E}^2(\vec{r},t) + \frac{1}{2\mu_0}\,\vec{B}^2(\vec{r},t)\right)$$

$$\downarrow \quad \underline{H} = \int d^3 \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\partial_t\,\underline{\vec{A}}(\vec{r},t)\right)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\vec{\nabla}\times\underline{\vec{A}}(\vec{r},t)\right)^2\right)$$

f) Bewegungsgl. f. $\underline{\vec{A}}$, $\underline{\Pi}$

g) **Entwicklung nach Moden**

reelles Feld

$$\underline{\vec{A}}(\vec{r},t) = \sum_k \vec{u}_k(\vec{r})\, c_k(t) + h.a.$$

Photonoperator

$$[c_n, c_{n'}^+] = \delta_{nn'}$$

n : sind Quantenzahl die Mode des Strahlungsfelds charakterisiert

$\vec{A} \sim \vec{A} e^{i\omega t}$

$$\Box \vec{A} = 0 \longrightarrow \underline{\underline{\Delta \vec{A}}} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{A} = 0 \qquad \vec{A}_\omega(\vec{r}) = \vec{A}$$

$$\text{Schrödgl.}(\vec{r}, t) \longrightarrow \underline{\underline{\underline{H} \varphi_n(\vec{r})}} = \varepsilon_n \varphi_n(\vec{r})$$

$$\text{Lösung f. } \vec{A}_n(\vec{r}) = \vec{A}_{\vec{k}}(\vec{r}) \qquad \omega = ck$$

$$= \left\{ \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} \cdot \vec{e}_\lambda(\vec{k}) \right\}$$