

Quantisierung Strahlungsfeld $\vec{A}(\vec{r}, t)$, Analogie zu Schrödingerfeld $\psi(\vec{r}, t)$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \vec{A} = 0$$

$$\left(H - i\hbar \partial_t \right) \psi = 0$$

Separationsansätze:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda} \underbrace{\vec{u}_{\lambda}(\vec{r})}_{\text{Moden-}} \underbrace{c_{\lambda}(t)}_{\text{Photonen-}} + \text{ka.} \quad \psi(\vec{r}, t) = \sum_{\mu} \varphi_{\mu}(\vec{r}) a_{\mu}(t)$$

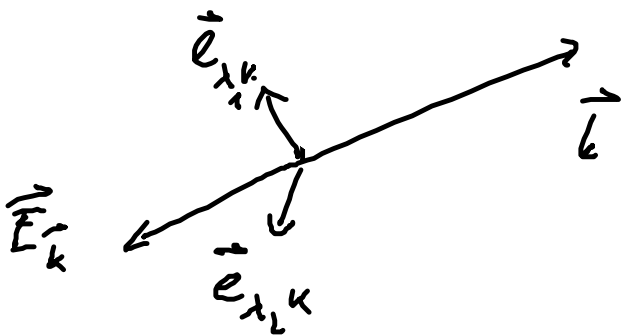
Photonen-Operatoren

6.2. Modenentwicklung im freien Raum

Wähle eben Welle f. die Mod $u_{\lambda}(\vec{r})$:

$$\vec{u}_{\lambda}(\vec{r}) \rightarrow \vec{e}_{\lambda k} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} \quad V=L^3, \quad \omega = c|\vec{k}|$$

\leftarrow Normierung.



für 1 festes \vec{k} als Wellenvektor

∃ 2 Polarisationsrichtungen

Feld in Mode: $\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \lambda(k)} f_k \vec{e}_{k\lambda} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{V}} c_{\lambda k}(t) + h.a.$

$f_k = \left(\frac{1}{2\epsilon_0 \omega(\vec{k})} \right)^{1/2}$ ← Zahl, Normierung von $c_{\lambda k}$ dimensionslos darzustellen

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \sum_{\vec{k}, \lambda} i\vec{k} \times \vec{e}_{\lambda k} f_k \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{V}} c_{\lambda k} + h.a.$

$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} = \sum_{\vec{k}, \lambda} i g_k \vec{e}_{\lambda k} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{V}} c_{\lambda k} + h.a.$

$\sim \dot{c}_{\lambda k}(t) = -i \underbrace{\omega(\vec{k})}_{\omega(\vec{k})} c_{\lambda k}(t)$

$g_k = f_k \omega(\vec{k}) = \left(\frac{1}{2\epsilon_0} \omega(\vec{k}) \right)^{1/2}$

Kontinuitätssatz

Energie d. Mode

$H_0 = \frac{1}{2} \int d^3r \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) \downarrow = \sum_{\lambda k} \hbar \omega(\vec{k}) \left(c_{\lambda k}^\dagger c_{\lambda k} + \frac{1}{2} \right)$

Bemerkungen: a) Strahlungsfeld ist gegeben über H_0 durch Satz von ungekoppelte harmon. Oszillatoren mit Bosevertauschungsregeln

b) stationäre Eigenwertproblem

$$\underline{H} |\varphi\rangle = E |\varphi\rangle$$



$$\sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar \omega_{\mathbf{k}\lambda} \left(n_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right)$$

$$|\varphi_N\rangle = \prod_{\mathbf{k}\lambda} |n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle$$

Produktzustand als N -Teilchenzustand

$$N = \sum_{\mathbf{k}\lambda} n_{\mathbf{k}\lambda}$$

c) Spaltenweite: $n_{\mathbf{k}\lambda}$ Photonen ($n_{\mathbf{k}\lambda} = 0, 1, 2, \dots$)

beschreibt die Mode $\lambda \vec{k}$ die zu der entsprechenden Ebene Wellen gehört

$$\lambda, \vec{k} \rightarrow |n_{\lambda \vec{k}}\rangle = |n_{\lambda k_x}\rangle |n_{\lambda k_y}\rangle |n_{\lambda k_z}\rangle$$

d) Folge der Quantisierung:

(i) Spontane Emission

(ii) Lamb shift: Aufspaltung Zustände $2S_{1/2}$ u. $2P_{1/2}$ beim H-Atom

(iii) Effekt der Vakuumenergie (Casimir etc.)

6.3. Feld und Photonenzahl als charakteristische Größen

von Shullersfeld zuständen

freier Raum $\zeta_{\mathbf{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

Was sieht sich voll freie f. Messung / Charakterisierung

Freier typ word Feld

$$\langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle = i \underbrace{\sum_{\lambda k} g_{\lambda k} \vec{e}_{\lambda k} \zeta_{\mathbf{k}}(\vec{r})}_{\langle E^+ \rangle} \underbrace{\langle c_{\lambda k}(t) \rangle}_{\langle E^- \rangle} + h.o.$$

Def: $\langle E^+ \rangle$ $\langle E^- \rangle$

Intensität: $\langle \underline{E}^- \underline{E}^+ \rangle \sim \underline{I} = 2\epsilon_0 c \langle \underline{E}^- \underline{E}^+ \rangle$

proportional 2 Poynting vektor

(ED)

Photodetektor

$$\underline{I} = 2\epsilon_0 c \sum_{k k'} \sum_{\lambda \lambda'} g_{\lambda k} g_{\lambda' k'}^* \vec{e}_{\lambda k} \cdot \vec{e}_{\lambda' k'} \zeta_{\mathbf{k}}(\vec{r}) \zeta_{\mathbf{k}'}^*(\vec{r}) \langle c_{\lambda k}^+ c_{\lambda' k'} \rangle$$

$$\int d^3r \underline{I}(\vec{r}, t) = 2\epsilon_0 c \sum_{\lambda k} |g_{\lambda k}|^2 \langle c_{\lambda k}^+(t) c_{\lambda k}(t) \rangle \quad (\text{Exp})$$

räumlich integrierte Intensität

Intensität ist prop. zu Photozelle

6.4. Beliebige Zustand d. Strahlungsfelds

diskutiere nun 1 Mode: 1 fets \vec{k} oder λ , $\vec{k}_1 \rightarrow$ gegeben
(oder Resonator mit 1 Mode)

$$\underline{H_0} |n\rangle = c^\dagger c |n\rangle = \epsilon_n |n\rangle, \quad \epsilon_n = n \hbar \omega \quad + \cancel{\frac{1}{2} \hbar \omega}$$

Beschreibungszustand $|n\rangle$ mit n Photonen

und Energie $\epsilon_n = n \hbar \omega$ lösen das Eigenwertproblem

Jeder beliebige Zustand kann als Superposition

dargestellt werden:

$$| \tilde{n} \rangle = \sum c_n |n\rangle$$

n ↑
jeder Zahl

alle Operatoren c, c^\dagger haben kein Index

Charakterisierung d. Zustands:

(i) Photonenverteilung: $|c_n|^2 \hat{=} p_n$ Wahrscheinlichkeit c^\dagger
n Photonen zu finden

(ii) Photonzahl $n = \langle c^\dagger c \rangle \equiv \langle \underline{n} \rangle$ mittl. Photonzahl
Abweichung v. mittl. Photzahl

$$\Delta n = \sqrt{\langle (\underline{n} - \langle \underline{n} \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle \underline{n}^2 \rangle - \langle \underline{n} \rangle^2}$$

(Photonzahl unsharp)

(iii) Erwartungswert $\langle \underline{E} \rangle$
Abweichung v. mittl. Feld

$$\Delta E = \sqrt{\langle \underline{E}^2 \rangle - \langle \underline{E} \rangle^2}$$

6.4.1. Kohärente Zustände

Zustände die klass. FD / Laser am nächsten kommen
Später: klass. Quelle erzeugt diese Zustände

$\langle \underline{E} \rangle \neq 0$ ist Voraussetzung f. klass. FD

$$\underline{E} \sim c, c^\dagger, \quad \langle c \rangle \neq 0 \neq \langle c^\dagger \rangle$$

es um Bte: $\langle \mathbb{1} | c | \mathbb{1} \rangle \neq 0$

Eigenzustand von c gesucht, sind fock Zustände bzw
kohärente Zustände

$$e^{-|\alpha|^2} \sum_{n, n'} \frac{(\alpha^*)^n \alpha^{n'}}{\sqrt{n!} \sqrt{n'}} \underbrace{\langle n | n' \rangle}_{\delta_{nn'}} =$$

$$e^{-|\alpha|^2} \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = 1 \quad \checkmark$$

c) $\{|\alpha\rangle\}$ sind nicht orthogonal

$$|\langle \alpha | \beta \rangle| = e^{-|\alpha - \beta|^2} \neq \delta_{\alpha\beta}$$

d) $|\alpha\rangle$ ist kein Eigenzustand von c^\dagger

aber $\langle \alpha | c^\dagger = \langle \alpha | \alpha^*$ Regel gilt

e) andere Darstellung $|\alpha\rangle$ einsetzen

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{(\alpha c^\dagger)^n}{n!} |0\rangle$$

2 Hilfe

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha c^\dagger} |0\rangle$$

$$= e^{(\alpha c^\dagger - \alpha^* c)} |0\rangle = |\alpha\rangle$$

$\equiv \underline{D}(\alpha)$ als Verschiebeoperator

$$1) e^{\underline{C}} e^{\underline{D}} = e^{\underline{C} + \underline{D} + \frac{1}{2} \underbrace{[\underline{C}, \underline{D}]}_{\text{Zahl}}}$$

$$2) c|0\rangle = 0$$

Charakterisierung flacher Zustand

$$(i) \text{ Photonverteilung } p_n: \quad C_n = \frac{e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

$$p_n = |C_n|^2 = \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}}{n!} \quad \text{Poissonverteilung}$$

(ii) Photozell und Schwachlicht:

$$\langle n \rangle = \langle \alpha | \underline{n} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \underbrace{c^\dagger}_{\alpha^*} c | \alpha \rangle = |\alpha|^2$$

$$\boxed{\langle n \rangle = |\alpha|^2}$$

Die mittl. Phot. Zahl ist auf $|\alpha|^2$ festgelegt

$$\Delta n^2 = \langle \underline{n}^2 \rangle - \langle \underline{n} \rangle^2$$

$$\langle \underline{n}^2 \rangle = \langle \alpha | \underbrace{c^\dagger c}_{\underline{n}} \underbrace{c^\dagger c}_{\underline{n}} | \alpha \rangle$$

$$= \langle \alpha | c^\dagger (1 + c^\dagger c) c | \alpha \rangle$$

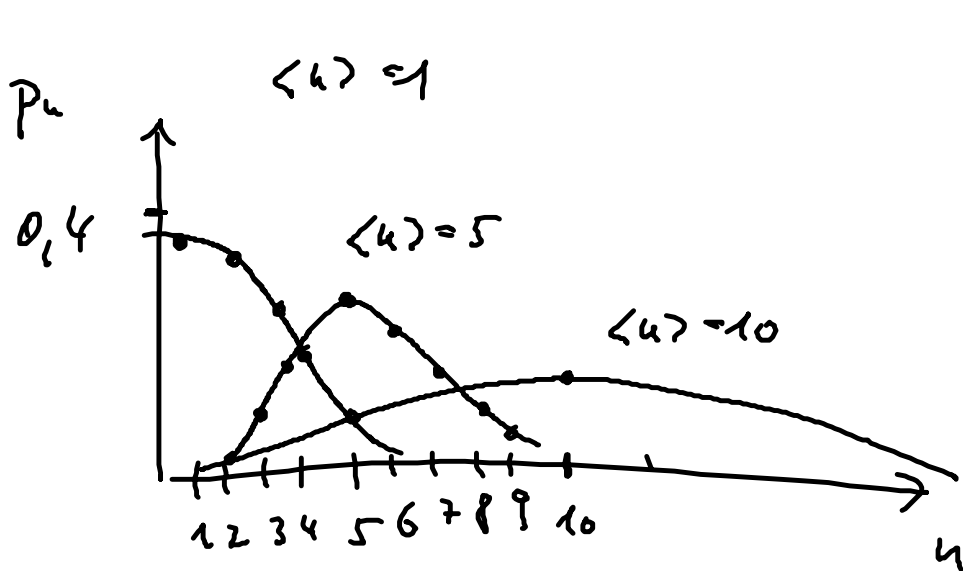
$$= \langle \alpha | c^\dagger c | \alpha \rangle + \langle \alpha | c^\dagger c^\dagger c c | \alpha \rangle$$

$$= |\alpha|^2 + |\alpha|^4$$

$$\Delta n^2 = \underbrace{|\alpha|^2 + |\alpha|^4}_{\langle n \rangle + \langle n \rangle^2} - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle$$

Die mittl. Schwach² ist proportional zur mittl. Phot. Zahl

Photonenverteilung im flachen Zustand

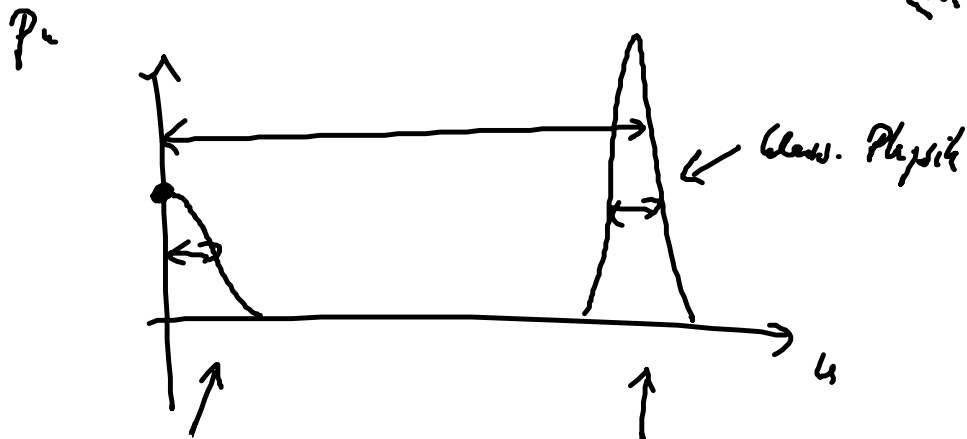


$$|k|^2 = \langle n \rangle$$

$$P_n = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}$$

Breite der Verteilung $\sqrt{\langle n \rangle}$

relative Schwachg. $\frac{\sqrt{\Delta n^2}}{\langle n \rangle} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\langle n \rangle}} \rightarrow 0$
 $\langle n \rangle \rightarrow \infty$



Verteilung
 unüblich

hier kann Interferenz
 als 1 Mesopt.
 angegeben werden

(iii) Feld- und Feldschwäche echte Wellen

$$\langle \vec{E} \rangle = -g_k |\alpha|^2 \overbrace{\sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \theta)} \vec{e}_k \neq 0$$

$$\langle \vec{E}^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{\frac{1}{2} \omega (\vec{k})}{2 \epsilon_0 V} = \text{Konstant}$$

