Quantisierung Strahlungsfeld $\vec{A}(\vec{r},t)$, Analogie zu Schrödingerfeld $\Psi(\vec{r},t)$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\vec{A} = 0 \qquad\qquad \left(\underline{H} - i\hbar\,\partial_t\right)\Psi = 0$$

Separationsansätze:

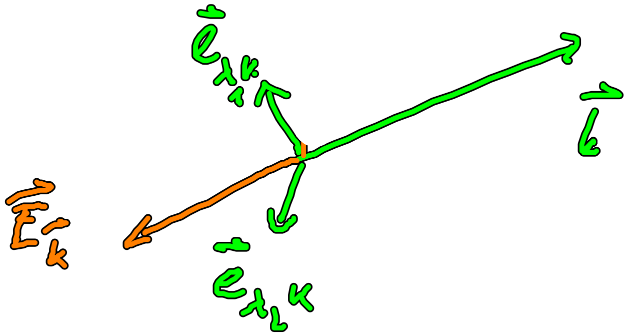
$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_\lambda \underbrace{\vec{u}_\lambda(\vec{r})}_{\text{Moden-funktionen}}\ \underbrace{c_\lambda(t)}_{\text{Photon-operatoren}} + \text{h.a.} \qquad \Psi(\vec{r},t) = \sum_k \varphi_k(\vec{r})\, a_k(t)$$

6.2. Modenentwicklung im freien Raum

Wähle ebene Welle f. die Moden $u_\lambda(\vec{r})$:

$$\vec{u}_\lambda(\vec{r}) \to \vec{e}_{k\lambda}\,\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{V}} \qquad V = L^3, \quad \omega = c|\vec{k}|$$

$\leftarrow$ Normierg.



für 1 festes $\vec{k}$ als Wellenvektor

$\exists$ 2 Polarisationsrichtungen

Felder in Moden:

$$\vec A(\vec r,t) = \sum_{\vec k,\lambda(\vec k)} f_k \, \vec e_{k\lambda} \, \frac{e^{i\vec k\vec r}}{\sqrt V} \, c_{\lambda k}(t) + h.a.$$

$$f_k = \left(\hbar / 2\varepsilon_0 \, \omega(\vec k)\right)^{1/2} \longleftarrow$$ Zahl, Normierung um $c_{\lambda k}$ dimensionslos darzustellen

$$\vec B = \vec\nabla \times \vec A = \sum_{k,\lambda} i\vec k \times \vec e_{\lambda k} \, f_k \, \frac{e^{i\vec k\vec r}}{\sqrt V} \, c_{\lambda k} + h.a.$$

$$\vec E = -\partial_t \vec A = \sum_{k,\lambda} i g_k \, \vec e_{\lambda k} \, \frac{e^{i\vec k\vec r}}{\sqrt V} \, c_{\lambda k} + h.a.$$

$$\underbrace{\sim \dot c_{\lambda k}(t) = -i\underset{\omega(\vec k)}{\underline{\omega_{\lambda k}}} \, c_{\lambda k}(t)}_{\text{Konsistenter Ansatz}}$$

$$g_k = f_k \, \omega(\vec k) = \left(\hbar\omega(\vec k)/2\varepsilon_0\right)^{1/2}$$

Entkopplung d. Moden

$$\downarrow$$

$$\underline{H}_0 = \frac{1}{2}\int d^3r \left(\varepsilon_0 \vec E^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec B^2\right) = \sum_{\lambda k} \hbar\omega(\vec k)\left(c^+_{\lambda k} c_{\lambda k} + \frac{1}{2}\right)$$

Bemerkungen:

a) Strahlungsfeld ist gegeben über $\underline{H}_0$ durch Satz von ungekoppelten harmon. Oszillatoren mit Bosevertauschungsregeln

b) stationäres Eigenwertproblem

$$\underline{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$$

$$\sum_{k\lambda} \hbar\omega_{k\lambda}\left(\underline{n}_{k\lambda} + \frac{1}{2}\right)$$

$$|\psi_N\rangle = \prod_{k\lambda} |n_{\underline{\lambda k}}\rangle$$

Produktzustände als N-Teilchenzustände

$$N = \sum_{\lambda k} n_{\lambda k}$$

c/ Sprechweise: $n_{\lambda k}$ Photonen $(n_{\lambda k} = 0, 1, 2, \dots)$

besetzen die Mode $\lambda \vec{k}$ die zu der entsprechenden

ebenen Welle gehört

$$\lambda, \vec{k} \rightarrow |n_{\lambda\vec{k}}\rangle = |n_{\lambda k_x}\rangle\, |n_{\lambda k_y}\rangle\, |n_{\lambda k_z}\rangle$$

d/ Folgen der Quantisierung:

(i) spontane Emission

(ii) Lamb shift: Aufspaltung zwischen $2S_{1/2}$ u. $2P_{1/2}$

beim H-Atom

(iii) Effekte der Vakuumenergie (Casimir etc.)

6.3. Feld und Photonenzahl als charakteristische Größe von Strahlungsfeldzuständen

freier Raum $\xi_k(\vec r) = \frac{1}{\sqrt V} e^{i\vec k\cdot\vec r}$

Was sind sinnvolle Größe f. Messung / Charakterisierung

<u>Erwartungswert Feld</u>

$$\langle \vec E(\vec r,t)\rangle = \underbrace{i\sum_{\lambda k} g_k \vec e_{\lambda k}\,\xi_k(\vec r)\,\langle c_{\lambda k}(t)\rangle}_{\langle E^+\rangle} + \underbrace{h.a.}_{\langle E^-\rangle}$$

<u>Def</u>:

<u>Intensität</u>: $\langle \underline{E}^- \underline{E}^+\rangle \sim I = 2\varepsilon_0 c \underbrace{\langle \underline{E}^- \underline{E}^+\rangle}_{\text{Photodetektor}}$

proportional zu Poyntingvektor (ED)

$$\underline{I} = 2\varepsilon_0 c \sum_{kk'}\sum_{\lambda\lambda'} g_k g_{k'}^* \vec e_\lambda \cdot \vec e_{\lambda k'}\,\xi_k(\vec r)\,\xi_{k'}^*(\vec r)\,\langle c_{\lambda k}^+ c_{\lambda k}\rangle$$

$$\underbrace{\int d^3r\ \underline{I}(\vec r,t)}_{\text{räumlich integrierte Intensität}} = 2\varepsilon_0 c \sum_{\lambda k} |g_k|^2 \underbrace{\langle c_{\lambda k}^+(t)\, c_{\lambda k}(t)\rangle}\qquad (\text{Exp})$$

Intensität ist prop. zu <u>Photonzahl</u>

6.4. Willkürliche Zustände d. Strahlungsfeldes

diskutiere nur 1 Mode: 1 fester $\vec{k}$ oder λ , $\vec{k},\lambda$ weglassen

(oder Resonator mit 1 Mode)

$$\underline{H}_0 |n\rangle = c^+ c\, |n\rangle = \varepsilon_n |n\rangle , \quad \varepsilon_n = n\hbar\omega \cancel{+\tfrac{1}{2}\hbar\omega}$$

Besetzungszahlzustand $|n\rangle$ mit n Photonen

und Energie $\varepsilon_n = n\hbar\omega$ lösen das Eigenwertproblem

Jeder beliebige Zustand kann als Superposition dargestellt werden:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$$

jede Zahl

alle Operatoren $\underline{c}, \underline{c}^+$ haben kein Index

Charakterisierung d. Zustands:

(i) Photonenverteilung: $|c_n|^2 \hat{=} p_n$ Wahrscheinlichkeit n Photonen zu finden

(ii) Photonzahl $n = \langle c^+ c \rangle \equiv \langle \underline{n} \rangle$ mittl. Photonzahl

Abweichung v. mittl. Photonzahl

$$\Delta n = \sqrt{\langle (\underline{n} - \langle \underline{n} \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle \underline{n}^2 \rangle - \langle \underline{n} \rangle^2}$$

(Photonzahl unschärfe)

(iii) Erwartungswert $\langle \underline{E} \rangle$

Abweichung v. mittl. Feld

$$\Delta E = \sqrt{\langle \underline{E}^2 \rangle - \langle \underline{E} \rangle^2}$$

6.4.1. kohärenten Zustände

Zustände die klass. ED / Laser am nächsten kommen

Später: klass. Quelle erzeugt diese Zustände

$\langle \underline{E} \rangle \neq 0$ ist Voraussetzg. f. klass. ED

$\underline{E} \sim c, c^+$, $\quad \langle c \rangle \neq 0 \neq \langle c^+ \rangle$

es muß gelten: $\langle \psi | c | \psi \rangle \neq 0$

Eigenzustand von c gesucht, sind fast klass. Zustände bzw

kohärente Zustände

Def. $c|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ α ist komplexe Zahl

Behauptung: $|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$

Beweis:

$$c|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \underbrace{c|n\rangle}_{\sqrt{n}\,|n-1\rangle}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n!}} = \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}}$$

Verschiebung Index Summe
$n \to n-1$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$= \alpha|\alpha\rangle \quad \checkmark$$

Bemerkungen:

a) $|\alpha\rangle$ ist Eigenzustand v. c zum Eigenwert α und wird Glauber zustand genannt

b) Normierung: $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$

$$e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,m'} \frac{(\alpha^*)^n \alpha^m}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}} \underbrace{\langle n | m \rangle}_{\delta_{nm}} =$$

$$e^{-|\alpha|^2} \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = 1 \checkmark$$

c) $\{|\alpha\rangle\}$ sind <u>nicht</u> orthogonal

$$|\langle \alpha | \beta \rangle| = e^{-|\alpha-\beta|^2}$$

$$\neq \delta_{\alpha\beta}$$

d) $|\alpha\rangle$ ist kein Eigenzustand von c^+

aber $\langle \alpha | c^+ = \langle \alpha | \alpha^*$ Regel gilt

e) andere Darstellung $|n\rangle$ einsetzen

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{(\alpha c^+)^n}{n!} |0\rangle$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha c^+} |0\rangle$$

Z Hilfe

$$\boxed{= \underbrace{e^{(\alpha c^+ - \alpha^* c)}}_{\equiv \underline{D}(\alpha) \text{ als Verschiebeoperator}} |0\rangle = |\alpha\rangle}$$

1) $$e^{\underline{C}} e^{\underline{D}} = e^{\underline{C}+\underline{D} + \frac{1}{2}\underbrace{[\underline{C},\underline{D}]}_{\text{Zahl}}}$$

2) $$c|0\rangle = 0$$

Charakteristika Glauber Zustand

(i) Photonverteilung p_n: $$c_n = \frac{e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

$$p_n = |c_n|^2 = \frac{e^{-|\alpha|^2}|\alpha|^{2n}}{n!}$$ Poissonverteilung

(ii) Photonzahl und Schwankung:

$$\langle n \rangle = \langle \alpha | \underline{n} | \alpha \rangle = \langle \alpha | c^+ c | \alpha \rangle = |\alpha|^2$$

$$\langle \alpha | c^+ \to \alpha^*, \quad c | \alpha \rangle \to \alpha$$

$$\boxed{\langle n \rangle = |\alpha|^2}$$

Die mittl. Photzahl ist auf $|\alpha|^2$ festgelegt

$$\Delta n^2 = \langle \underline{n}^2 \rangle - \langle \underline{n} \rangle^2$$

$$\langle \underline{n}^2 \rangle = \langle \alpha | \underbrace{c^+ c}_{\underline{n}} \underbrace{c^+ c}_{\underline{n}} | \alpha \rangle$$

$$= \langle \alpha | c^+ (1 + c^+ c) c | \alpha \rangle$$

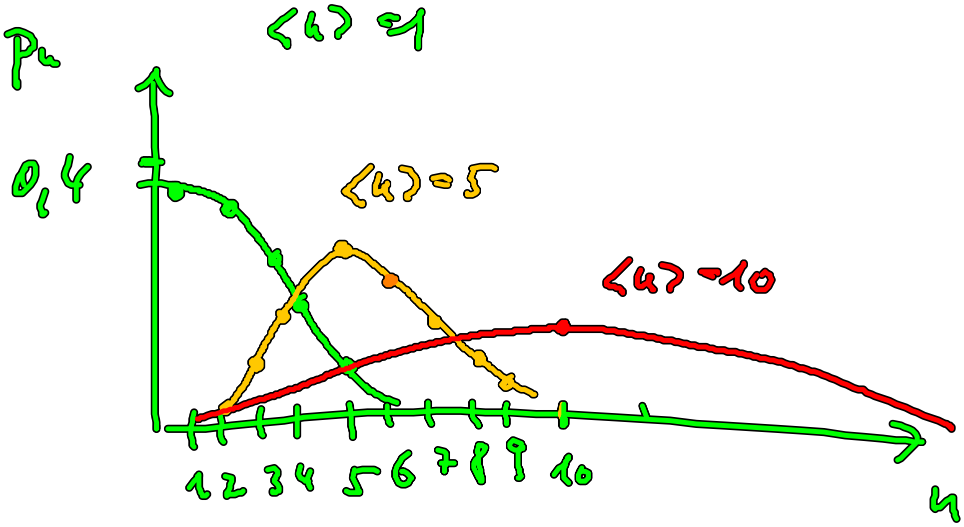
$$= \langle \alpha | c^+ c | \alpha \rangle + \langle \alpha | c^+ c^+ c c | \alpha \rangle$$

$$= |\alpha|^2 + |\alpha|^4$$

$$\Delta n^2 = \langle n \rangle + \langle n \rangle^2 - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle$$

Die mittlere Schwankung^2 ist proportional zur mittl. Photzahl

Photonenverteilung im kohärenten Zustand



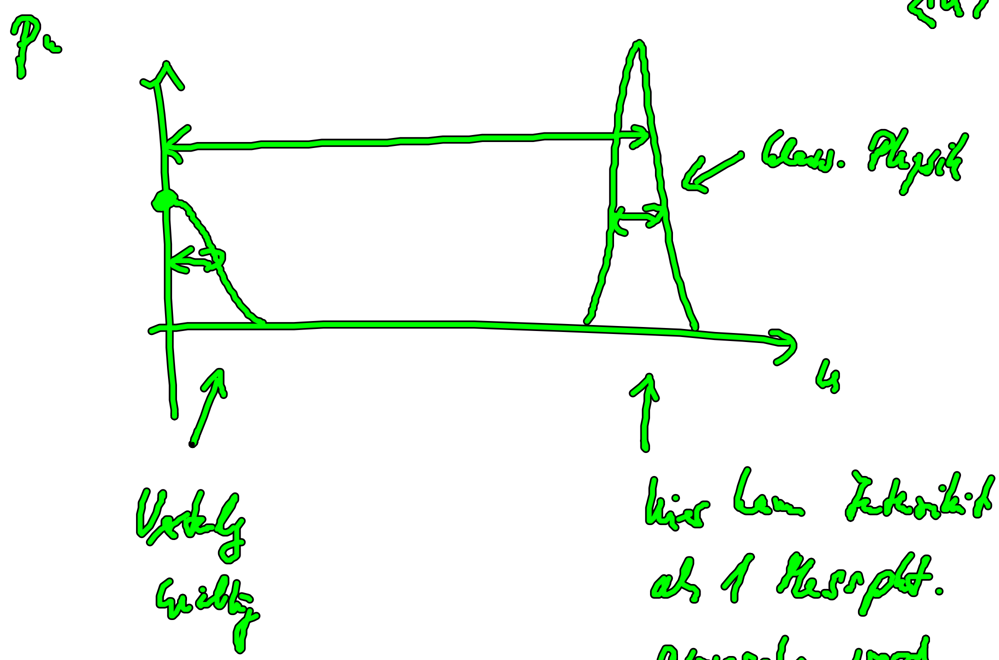
$$|\alpha|^2 = \langle n\rangle$$

$$p_n = \frac{\langle n\rangle^n}{n!}\, e^{-\langle n\rangle}$$

Breite der Verteilung $\sqrt{\langle n\rangle}$

relative Schwankung $\dfrac{\sqrt{\Delta n^2}}{\langle n\rangle} \to \dfrac{1}{\sqrt{\langle n\rangle}} \to 0$

$\langle n\rangle \to \infty$



(iii) Feld- und Feldschwankung echte Welle

$$\langle \vec{E} \rangle = -g_k |\alpha| 2 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \theta)\, \vec{e}_k \neq 0$$

$$\langle \vec{E}^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{\hbar \omega(\vec{k})}{2 \varepsilon_0 V} = \text{konstant}$$