

3. Wechselwirkung von Elektronen und Photonen

typischerweise 2 Formen der Kopplung

$\vec{A} \cdot \vec{p}$ \rightarrow mehr fundamental (kanonische Mechanik)

$\vec{r} \cdot \vec{E}$ \rightarrow Dipolnäherung (kanonische Transform.)

$$H = \sum_i \frac{(\vec{p}_i - q \vec{A}(\vec{r}_i, t))^2}{2m} + q \phi_{\text{ken}}(\vec{r}_i)$$

$$\rightarrow \approx \sum_i \left(\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + q \phi_{\text{ken}}(\vec{r}_i) - q \vec{r}_i \cdot \vec{E}(t) \right)$$

$\vec{E}(t)$: räumlich konstante Feld am Atom

Zweitquantisierung

$$H^{(2)} = \int d^3r \psi^\dagger(\vec{r}, t) \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + q \phi_{\text{ken}}(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}, t)$$

$$- \int d^3r \psi^\dagger(\vec{r}, t) q \vec{r} \psi(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(t) + \underline{\underline{H_{\text{photon}}}}$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_n \varphi_n(\vec{r}) a_n(t)$$

$$H = \underbrace{\sum_n \epsilon_n a_n^\dagger a_n}_{\text{elektronische Energie im Atompotential z.B. Wasserstoffenergien}} + \underbrace{H_{\text{el-pt}}}_{\text{wechselwirkung!}} + \underbrace{\sum_{\lambda k} \hbar \omega_{\lambda k} c_{\lambda k}^\dagger c_{\lambda k}}_{\text{Photonen im freien Raum ohne Licht-Mechanik}}$$

$$H_{\text{el-pt}} = - \sum_{u_1, u_2} q \int d^3r \underbrace{\varphi_{u_1}^*(\vec{r}) \vec{r} \varphi_{u_2}(\vec{r})}_{\text{Dipolmoment d. Atoms}} \cdot \vec{E}(t) a_{u_1}^\dagger a_{u_2}(t)$$

$$= - \sum_{u_1, u_2} \underbrace{d_{u_1 u_2}}_{\text{Dipolmoment d. Atoms}} \cdot \vec{E}(t) a_{u_1}^\dagger a_{u_2}(t)$$

Dipolmoment d.
Atoms bestimmt
d. Wellenfunktion

Dipol-Feld Kopplung

- entweder $\vec{E}(t)$ als klassisches Feld, von außen vorgegeben (GA)
→ „semiklassische“ (halbklassische) Theorie
- oder: $\vec{E}(t)$ ist das umgebende Quantenfeld,
und wird selbstkonsistent quantisiert

"vollquantenmechanische" Beschreibung

$$\vec{E}(t) = \sum_{\lambda k} \left[i \left(\frac{\hbar \omega_k}{2 \epsilon_0 L^3} \right)^{1/2} \vec{e}_{\lambda k} c_{\lambda k}(t) + \text{h.a.} \right]$$

aus VL

Quantisierung d.

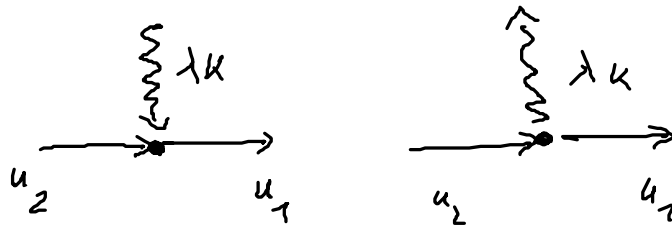
ev. Feld $\vec{r} = 0$

Einsetzen in H:

$$H_{\text{d-pt}} = - \sum_{\substack{u_1, u_2 \\ \lambda k}} \left[\underbrace{\vec{d}_{u_1 u_2} \cdot \vec{e}_{\lambda k}}_{g_{u_1 u_2}^{\lambda k}} i \left(\frac{\hbar \omega_k}{2 \epsilon_0 L^3} \right)^{1/2} a_{u_1}^\dagger a_{u_2} c_{\lambda k} + \text{h.a.} \right]$$

$g_{u_1 u_2}^{\lambda k} =$ Kopplungsstärke zw. Elektron und Licht
 $\sim \vec{d}_{u_1 u_2}$

$$= - \sum_{\substack{u_1, u_2 \\ \lambda k}} \left(g_{u_1 u_2}^{\lambda k} a_{u_1}^\dagger a_{u_2} c_{\lambda k} + \text{h.a.} \right)$$



Photoabsorption

Photoemission

4. Method in Behandlung v. Wechselwirkungen

oft und i.a. mit störungstheoretische Zugang

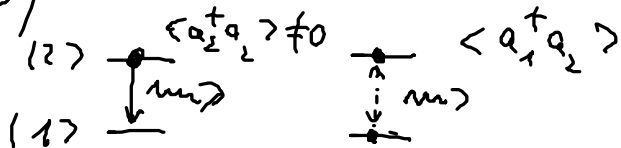
mit störungstheoretische Zugang am Ende d. VL

a) stationäre Prozesse: Schrödingers störungstheorie
endliche Ordnung

→ Aufspaltung v. E -Niveaus

d. WW Elektron - Vakuumstrahlungsfeld

b) nicht stationäre Prozesse:



spontane
Emission

oszillierend
Dipol, durch
Laser angeregt

(i) Heisenberggleichg. f. Operatoren

$$\frac{d}{dt} \langle a_2^\dagger a_2 \rangle = \dots - \gamma \langle a_2^\dagger a_2 \rangle$$

↑
in Störungstheorie Beding.
d. Zerfallszeit

(ii) Schrödingergleichg. f. Wellenfkt.

$$i\hbar \partial_t |\psi\rangle = H^{(0)} |\psi\rangle$$

$|\psi\rangle$: Entwidg. nach Besetzungszahl-
zuständen $|\dots 1 \dots 1\rangle$

Herleitg. d. Koeffizienten

exakte Lösge sind ungl. für weiße Elektronen und weiße Feldmoden
kann durch Nanotechnologie hergestellt werden (Mikrokavitäten)

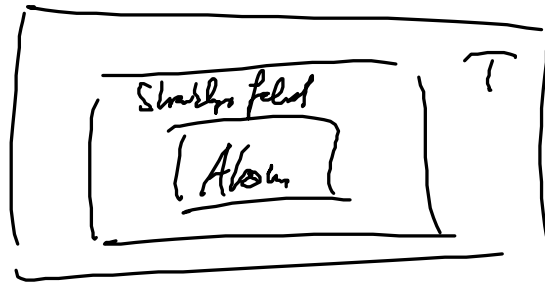
(iii) Wechselwirkungsbild anwenden:

Vorteil einer Trennung v. H_0 -Dynamik $\rightarrow \underline{O}_W(t)$

H_{elpt} -Dynamik $\rightarrow \langle \psi | \hat{r}_W \rangle = \langle \psi_{\text{elpt}} | \hat{r}_W \rangle$

$\langle \underline{O} \rangle$ sollte nicht von Bild abhängen

Statistische Physik



Wärmebad

$$\rho(t) = \frac{e^{-H/kT}}{\mathcal{Z}}$$

$$\langle \underline{O} \rangle = \text{sp}(\rho \underline{O})$$

\uparrow
statistischer Operator

$\rho(t), \underline{O}$ \rightarrow Schrödingerbild: von Neumanngl.

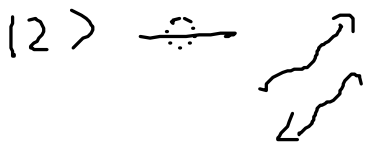
$\rho, \underline{O}(t)$ \rightarrow Heisenbergbild

wählt jetzt Heisenbergbild f. El Pt WW \rightarrow nichtstationär

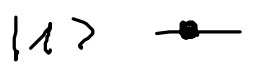
Störtheorie f. E -Verschieb. \rightarrow stationäre

5. Elektron - Photon - WW: Anwendungsbeispiele

5.1 Zweireiter System und quantisiertes Feld



Satz v. Operatoren: $(a_1^{(+)}, a_2^{(+)}, c_{+k}^{(+)})$



1 Elektron im Zustand gewichteter AB

Observable: Photodichte $n_{ph} = \sum_{+k} \langle c_{+k}^{\dagger} c_{+k} \rangle$ Intensität /
Energiedichte

$\rho_1 = \langle a_1^{\dagger} a_1 \rangle$ mit der Zahl d. Elektron unten

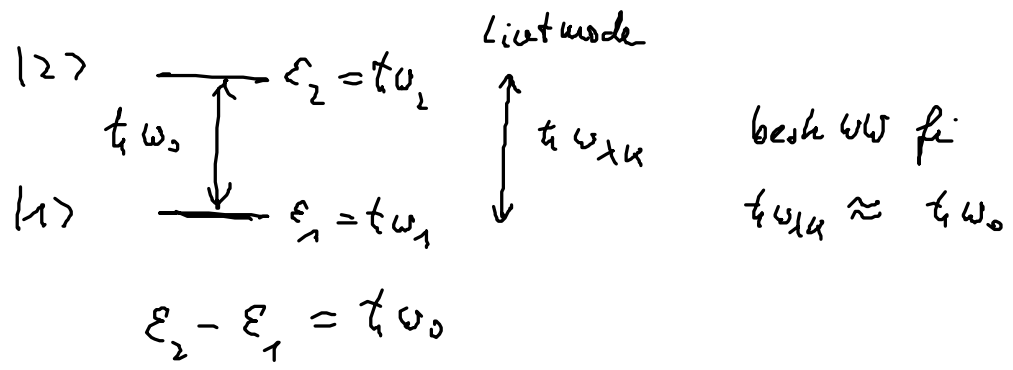
$\rho_2 = \langle a_2^{\dagger} a_2 \rangle$ - " - oben

$\rho_{12} = \langle a_1^{\dagger} a_2 \rangle$ Übergangsamplitude zw. $|1\rangle$ und $|2\rangle$

a) Drehwelle Näherung (Rotating Wave Approximation)

$$H_{el-ph} = - \sum_{+k} \sum_{u_1, u_2} g_{u_1, u_2}^{+k} a_{u_1}^{\dagger} a_{u_2} c_{+k} + h.c.$$

Welche Term sind dominant für "resonante" WW



freie Bewegg. d. Operatoren: $\dot{c}_{1k} = -i\omega_{1k} c_{1k} \rightarrow c_{1k} \sim e^{-i\omega_{1k}t}$

$$\omega_1 = -\frac{\omega_0}{2}$$

$$\omega_2 = +\frac{\omega_0}{2}$$

$$a_1^\dagger a_2 \sim e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} = e^{-i\omega_0 t}$$

$$a_2^\dagger a_1 \sim e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} = e^{-i\omega_0 t}$$

$$\omega_1 - \omega_2 = -\omega_0$$

$$\omega_2 - \omega_1 = +\omega_0$$

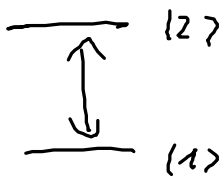
aus d. Summe wird nur die langsam veränderliche Produkte,
also $e^{+i\omega_0 t} e^{-i\omega_{1k} t}$ und $e^{-i\omega_0 t} e^{+i\omega_{1k} t}$

mitgenommen $e^{+i\omega_0 t} e^{+i\omega_{1k} t} \rightarrow$ vernachlässigt

wird schnell oszillierende Term die sich wegmitteln

$$H = - \sum_{1k} \left(g_{21}^{1k} a_2^\dagger a_1 c_{1k} + g_{12}^{1k} c_{1k}^\dagger a_1^\dagger a_2 \right)$$

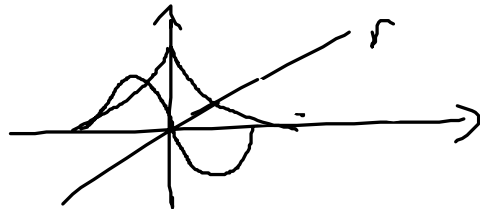
wichtig sind nur $g_{a_2 a_2} \neq 0$ f. $a_1 \neq a_2$ angenommen?



$$\langle a_{a_1} a_{a_2} \rangle = g \int d^3 r \psi_{a_1}^*(\vec{r}) \vec{r} \psi_{a_2}(\vec{r})$$

$$\int d^3 r \psi_{a_1} \psi_{a_2} = \int d^3 r \text{ ungerade Fkt.} = 0$$

$$\int d^3r$$



$r \neq 0$

c.a.

b) Observable in ZNS

Heisenbergbewegungsgl. $\dot{\underline{O}} = \frac{i}{\hbar} [\underline{H}, \underline{O}]$ $\underline{O}(t), \underline{H}(t)$

$$\langle \underline{O} \rangle = \text{sp}(\rho(t_0) \underline{O}(t))$$

(i) Übergangsamplitude:

$$\frac{d}{dt} (a_1^\dagger a_2) = \frac{i}{\hbar} [\underline{H}_0 + \underline{H}_{\text{el-ph}}, a_1^\dagger a_2]$$

$$= i(\omega_1 - \omega_2) a_1^\dagger a_2 + \frac{i}{\hbar} [\underline{H}_{\text{el-ph}}, a_1^\dagger a_2]$$

$$\frac{1}{\hbar} [\underline{H}_{\text{el-ph}}, a_1^\dagger a_2] = - \sum_{\lambda k} g_{2\lambda}^{1k} c_{\lambda k} \underbrace{[a_2^\dagger a_1, a_1^\dagger a_2]}_*$$

$$* = a_2^\dagger a_1 a_1^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_2 a_2^\dagger a_1$$

$$= a_2^\dagger (1 - a_1^\dagger a_1) a_2 - \dots$$

$$= a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_2 a_2^\dagger a_1 - \dots$$

$$\boxed{\begin{matrix} a_1 a_1^\dagger + a_1^\dagger a_1 \\ = 1 \end{matrix}}$$

$$\boxed{a_1 a_2^\dagger + a_2^\dagger a_1 = 0}$$

$$= a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger (1 - a_2 a_2^\dagger) a_1 - a_1^\dagger a_2 a_2^\dagger a_1$$

$$= a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1$$

$$\dot{a}_1^\dagger a_2 = i(\omega_1 - \omega_2) a_1^\dagger a_2 - i \sum_{\lambda k} g_{2\lambda k} (a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1) c_{\lambda k}$$

gleich. f. Dynamik der Übergangsamplitude

2 Anteile: freie Bewegg. $e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} \rightarrow$ Dipolschwängg.

$\omega \omega$; Inhomogenität: Treiberterm

\sim Besetzungsdifferenz mal Photofeld

$$\text{allerdings } \langle a_1^\dagger a_2 \rangle \rightarrow \langle a_2^\dagger a_2 \rangle c_{\lambda k}$$

gleichung schließt nicht, weil Kopplung an lösere Term der Licht-Matrix $\omega \omega$ $\langle \quad \rangle$ gilt nur f. Gleicherzustand.

(ii) Photofeld

$$\dot{c}_{\lambda k} = -i\omega_{\lambda k} c_{\lambda k} + i g_{\lambda k} a_1^\dagger a_2$$

$$\dot{c}_{\lambda k}^{\dagger} = i\omega_k c_{\lambda k}^{\dagger} - i \underbrace{g_{\lambda k}}_{\text{freie Oszillation}} \underbrace{g_{\lambda k}^{\dagger}}_{\text{Treiber: Dipoloszillation}} a_2^{\dagger} a_1$$

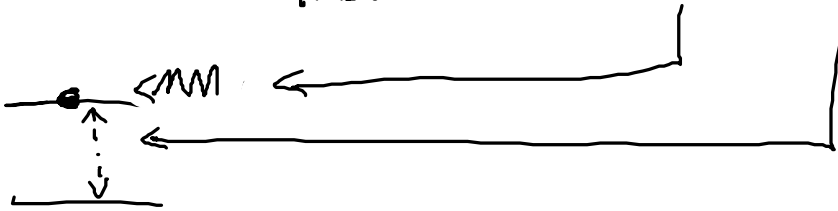
(iii) elektronisch Besetzungszahl

$$\dot{a}_1^{\dagger} a_1 = -i \sum_{\lambda k} g_{\lambda k}^{\dagger} c_{\lambda k} a_2^{\dagger} a_1 + \text{h.a.}$$

$$\dot{a}_2^{\dagger} a_2 = +i \sum_{\lambda k} g_{\lambda k} c_{\lambda k} a_2^{\dagger} a_1 + \text{h.a.}$$

Treiber: Produkt aus Photon und Dipol

127



and zu sehen:

$$\frac{d}{dt} \left(a_1^{\dagger} a_1 + a_2^{\dagger} a_2 \right) = 0$$

$$\text{Konsatz} = 1$$

Anzahl d. Elektron ist konstant (1).