

3. Wechselwirkung von Elektronen und Photonen

typischerweise 2 Formen der Kopplung

$\vec{A} \cdot \vec{p}$ → mehr fundamental (kanonische Mechanik)

$\vec{r} \cdot \vec{E}$ → Dipolnäherung (kanonische Transformation)

$$H = \sum_i \frac{(\vec{p}_i - q \vec{A}(\vec{r}_i, t))^2}{2m} + q \phi_{\text{ken}}(\vec{r}_i)$$

$$\rightarrow \approx \sum_i \left(\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + q \phi_{\text{ken}}(\vec{r}_i) - q \vec{r}_i \cdot \vec{E}(t) \right)$$

$E(t)$: räumlich konstantes Feld am Atom

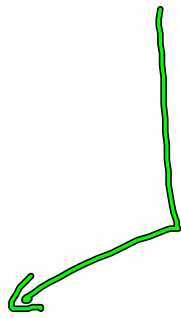
Zweitquantisierung

$$H^{(2)} = \int d^3r \psi^\dagger(\vec{r}, t) \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + q \phi_{\text{ken}}(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}, t)$$

$$- \int d^3r \psi^\dagger(\vec{r}, t) q \vec{r} \psi(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(t) + \underline{H_{\text{photon}}}$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_n \varphi_n(\vec{r}) a_n(t)$$

$$H = \underbrace{\sum_n \epsilon_n a_n^\dagger a_n}_{\text{elektronische Energie im Atompotential z.B. Wasserstoffenergien}} + \underbrace{H_{\text{el-pt}}}_{\text{wechsel!}} + \underbrace{\sum_{\lambda k} \hbar \omega_{\lambda k} c_{\lambda k}^\dagger c_{\lambda k}}_{\text{Photonen im freien Raum ohne Licht-Meter Wechsel}}$$



$$H_{\text{el-pt}} = - \sum_{n_1, n_2} q \int d^3r \underbrace{\varphi_{n_1}^*(\vec{r}) \vec{r} \varphi_{n_2}(\vec{r})}_{\text{Dipolmoment d. Atoms}} \cdot \vec{E}(t) a_{n_1}^\dagger a_{n_2}(t)$$

$$= - \sum_{n_1, n_2} \underbrace{d_{n_1, n_2}}_{\text{Dipolmoment d. Uell. funktion}} \cdot \vec{E}(t) a_{n_1}^\dagger a_{n_2}(t)$$

Dipolmoment d.
Atoms bekannt
d. Uell. funktion



Dipol - Feld Kopplung

- entweder $\vec{E}(t)$ als klassisches Feld, von außen vorgegeben (Licht)
 - „semiklassische“ (halb klassisch) Theorie
- oder: $\vec{E}(t)$ ist das umgebende Quantenfeld, und wird selbstkonsistent quantisiert

"vollquantenmechanische" Beschreibung

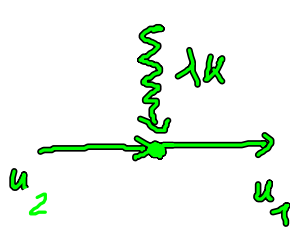
$$\vec{E}(t) = \sum_{\lambda k} \left[i \left(\frac{\hbar \omega_k}{2 \epsilon_0 L^3} \right)^{1/2} \vec{e}_{\lambda k} c_{\lambda k}(t) + \text{h.a.} \right] \quad \begin{array}{l} \text{aus VL} \\ \text{Quantifiz. d.} \\ \text{ev. Feld } \vec{r}=0 \end{array}$$

Einsetzen in H :

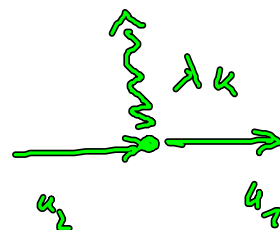
$$H_{\text{opt}} = - \sum_{\substack{u_1, u_2 \\ \lambda k}} \left[\vec{d}_{u_1 u_2} \cdot \vec{e}_{\lambda k} i \left(\frac{\hbar \omega_k}{2 \epsilon_0 L^3} \right)^{1/2} a_{u_1}^\dagger a_{u_2} c_{\lambda k} + \text{h.a.} \right]$$

$g_{u_1 u_2}^{\lambda k} = \text{Kopplungsstärk zw. Zellen und Licht}$
 $\sim \vec{d}_{u_1 u_2}$

$$= - \sum_{\substack{u_1, u_2 \\ \lambda k}} \left(g_{u_1 u_2}^{\lambda k} a_{u_1}^\dagger a_{u_2} c_{\lambda k} + \text{h.a.} \right)$$



Photoabsorption



Photoemission

4. Method in Behandlung v. Wechselwirkungen

oft und i.a. mit störphtonischer Zugang

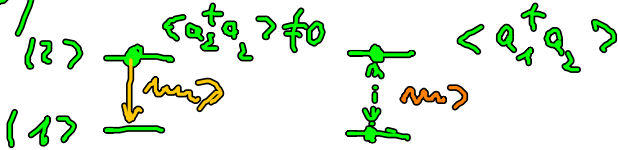
mit störphtonischer Zugang an Ende d. VL

a) stationäre Prozesse: Schrödingers störphtontheorie
endliche Ordnung

→ Aufspaltung v. F -Niveaus

d. WW Q -Werte - Vakuumstrahlungsfeld

b) nicht stationäre Prozesse:



spontane
Emission

oszillierend
Dipol, durch
Laser angeregt

(i) Herabzugleichg. f. Obermode

$$\frac{d}{dt} \langle a_2^\dagger a_2 \rangle = \dots - \gamma \langle a_1^\dagger a_2 \rangle$$

↑
in Störphtontheorie Beding.
d. Zeitabz. z. t

(ii) Schrödingergleichg. f. Vakuumfeld.

$$i\hbar \partial_t |k\rangle = H^0 |k\rangle$$

$|k\rangle$: Entwidg. aus $2n$ Teilchenzahl-
zuständen $| \dots 1 \dots 1 \rangle$

Herh. d. Koeffizienten

erhalt. köpfe sind ungl. für unip. Elektronen und unip. Feldmoden
kann durch Nanostrukturierung hergestellt werden (Mikrokanaliten)

(iii) Wechselwirkungsbild anwenden:

Verteil ein Trunc. v. H_0 -Dyquant $\rightarrow \underline{Q}_w(t)$

Helpt-Dyquant $\rightarrow \langle \hat{r}_w \rangle = \langle \hat{r}_w \rangle$

$\langle \underline{Q} \rangle$ sollte nicht von Bild abhängen

Statistische Physik



Wärmebad

$$p(t) = \frac{e^{-H/kT}}{Z}$$

$$\langle \underline{Q} \rangle = \text{sp}(\rho \underline{Q})$$

\uparrow
statistischer Operator

$\rho(t), \underline{Q} \rightarrow$ Schrödingerbild: von Messung abh.

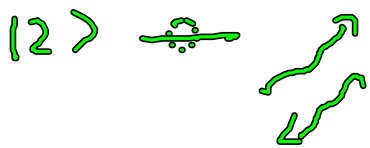
$\rho, \underline{Q}(t) \rightarrow$ Heisenbergbild

wählst jetzt Heisenbergbild f. El Pt UW \rightarrow nichtstochastisch

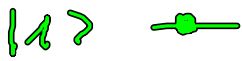
Störtheorie f. E-Verdichtg \rightarrow stochastisch

5. Elektron-Photon-UW: Anwendungsbeispiele

5.1 Zweikörpersystem und quantisiertes Feld



Satz v. Operatoren: $(a_1^{(+)}, a_2^{(+)}, c_{1k}^{(+)})$



1 Elektron in Zustand gewinkelter AB

Observable: Photodichte $n_{ph} = \sum_{1k} \langle c_{1k}^{\dagger} c_{1k} \rangle$ Intensität /
Energiedichte

$\rho_1 = \langle a_1^{\dagger} a_1 \rangle$ mit HZahl d. Elektron unter

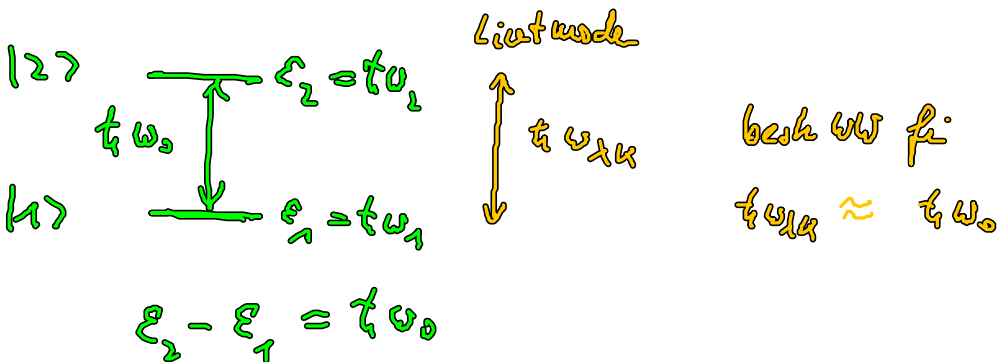
$\rho_2 = \langle a_2^{\dagger} a_2 \rangle$ - 1 - oben

$\rho_{12} = \langle a_2^{\dagger} a_1 \rangle$ Übergangswahrsch. zw. $|1\rangle$ und $|2\rangle$

a) Drehwellnäherung (Rotating Wave Approximation)

$$H_{el-ph} = - \sum_{1k} \sum_{u_1, u_2} g_{u_1, u_2}^{1k} a_{u_1}^{\dagger} a_{u_2} c_{1k} + h.c.$$

welche Term sind dominant für „resonante“ WW



freie Bewegung d. Operatoren: $\dot{c}_{1k} = -i\omega_{1k} c_{1k} \rightarrow c_{1k} \sim e^{-i\omega_{1k}t}$

$$\omega_1 = -\frac{\omega_0}{2}$$

$$\omega_2 = +\frac{\omega_0}{2}$$

$$a_1^\dagger a_2 \sim e^{i(\omega_2 - \omega_1)t}$$

$$a_2^\dagger a_1 \sim e^{i(\omega_1 - \omega_2)t}$$

$$\omega_1 - \omega_2 = -\omega_0$$

$$\omega_2 - \omega_1 = +\omega_0$$

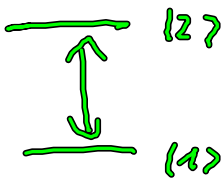
an der Summe wird nur die lauffreie orthogonale Produkte,
also $e^{+i\omega_0 t} e^{-i\omega_{1k} t}$ und $e^{-i\omega_0 t} e^{+i\omega_{1k} t}$

zusammen $e^{+i\omega_0 t} e^{+i\omega_{1k} t} \rightarrow$ verschwindet

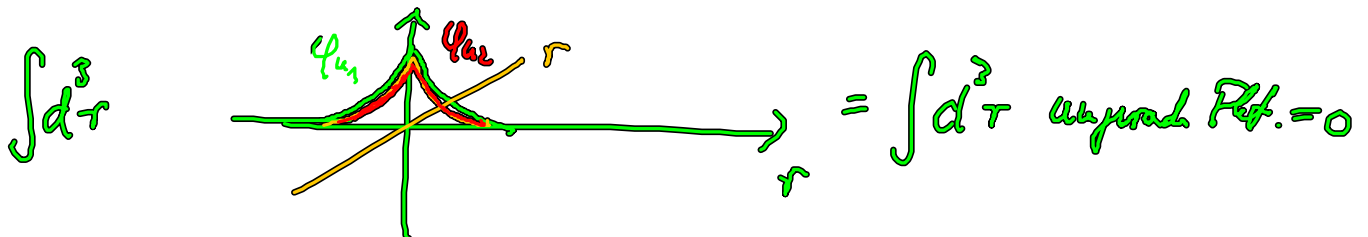
wird schnell verschwindende Term die sich wegmitteln

$$H = - \sum_{1k} \left(g_{21}^{1k} a_2^\dagger a_1 c_{1k} + g_{12}^{1k} c_{1k}^\dagger a_1^\dagger a_2 \right)$$

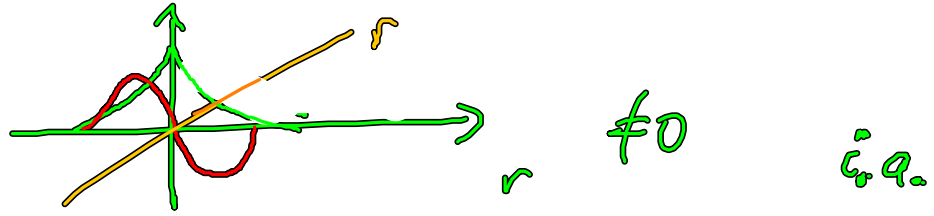
wichtig sind wir $g_{12} \neq 0$ f. $\omega_1 \neq \omega_2$ anzunehmen?



$$\langle a_{\omega_1} a_{\omega_2} \rangle = \int d^3r \psi_{\omega_1}^*(\vec{r}) \psi_{\omega_2}(\vec{r})$$



$$\int d^3r$$



b) Observable in ZNS

Heizberg's eqn. $\dot{\underline{O}} = \frac{i}{\hbar} [\underline{H}, \underline{O}]$ $\underline{O}(t), \underline{O}(t')$

$$\langle \underline{O} \rangle = \text{sp}(\rho(t_0) \underline{O}(t))$$

(i) Übergangsamplitude:

$$\frac{d}{dt} (a_1^\dagger a_2) = \frac{i}{\hbar} [\underline{H}_0 + \underline{H}_{\text{int}}, a_1^\dagger a_2]$$

$$= i(\omega_1 - \omega_2) a_1^\dagger a_2 + \frac{i}{\hbar} [\underline{H}_{\text{int}}, a_1^\dagger a_2]$$

$$\frac{i}{\hbar} [\underline{H}_{\text{int}}, a_1^\dagger a_2] = - \sum_{\lambda k} g_{\lambda k} c_{\lambda k} [a_2^\dagger a_1, a_1^\dagger a_2]$$

$$* = a_2^\dagger a_1 a_1^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_2 a_2^\dagger a_1$$

$$= a_2^\dagger (1 - a_1^\dagger a_1) a_2 - \dots$$

$$= a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_2 a_2^\dagger a_1 - \dots$$

$$\boxed{a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 = 1}$$

$$\boxed{a_1 a_2^\dagger + a_2^\dagger a_1 = 0}$$

$$= a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger (1 - a_2^\dagger a_2) a_1 - a_1^\dagger a_2 a_2^\dagger a_1$$

$$= a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1$$

$$\dot{a}_1^\dagger a_2 = i(\omega_2 - \omega_1) a_1^\dagger a_2 - i \sum_{jk} g_{2j}^{jk} (a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1) c_{jk}$$

gleich. f. Dynamik des Übergangssysteme

2 Anteile: freie Beweg. $e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} \rightarrow$ Dipolschwängg.

ω_1 ; Juhstorgewicht: Treibersterm

\sim Besetzungsdifferenz und Photofeld

allerdings $\langle a_1^\dagger a_2 \rangle \rightarrow \langle a_2^\dagger a_2 \rangle \langle c_{jk} \rangle$

gleich schließt nicht, weil Kopplg an höhere Terme der Licht-Matrix $\omega_1 \langle \dots \rangle$ gilt nur f. Grundzustand.

(ii) Photofeld

$$\dot{c}_{jk} = -i\omega_{jk} c_{jk} + i g_{jk}^{jk} a_1^\dagger a_2$$

$$\dot{c}_{\lambda k}^{\dagger} = i\omega_k c_{\lambda k}^{\dagger} - i \underbrace{g_{\lambda 1}^{\dagger k}}_{\text{frei Oszillieren}} \underbrace{a_2^{\dagger} a_1}_{\text{Freier: Dipoloszillation}}$$

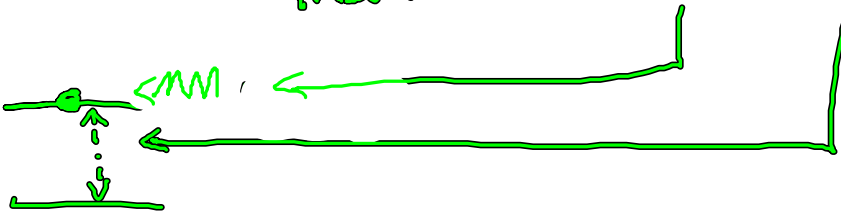
(iii) deltonisch Besetzungszahl

$$\dot{a}_1^{\dagger} a_1 = -i \sum_{\lambda k} g_{\lambda 1}^{\dagger k} c_{\lambda k} a_2^{\dagger} a_1 + \text{h.a.}$$

$$\dot{a}_2^{\dagger} a_2 = +i \sum_{\lambda k} g_{\lambda 2}^{\dagger k} c_{\lambda k} a_2^{\dagger} a_1 + \text{h.a.}$$

Freier: Erhalt an Photonen und Dipol

127



and zu sehen:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{(a_1^{\dagger} a_1 + a_2^{\dagger} a_2)}_{\text{Konserviert}} = 0$$

$$\text{Konserviert} = 1$$

Anzahl d. Delton ist konserviert (1).