c) Ratengleichungen f. Photonen, Elektronen

Suchen gekoppeltes System

$$f_1 = \langle a_1^+ a_1 \rangle, \quad f_2 = \langle a_2^+ a_2 \rangle, \quad n_{ph} = \sum_{\lambda k} \langle c_{\lambda k}^+ c_{\lambda k} \rangle$$

$$\dot{c}_{\lambda k} = -i\omega_k c_{\lambda k} + i g_{12}^{\lambda k} a_1^+ a_2 \qquad \Big| \, c_{\lambda k}^+ \cdot$$

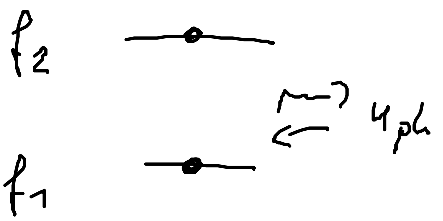
$$\dot{c}_{\lambda k}^+ = +i\omega_k c_{\lambda k}^+ - i g_{12}^{\lambda k *} a_2^+ a_1 \qquad \Big| \cdot c_{\lambda k}$$

$\downarrow$

$$\frac{d}{dt}\langle c_{\lambda k}^+ c_{\lambda k} \rangle = i g_{12}^{\lambda k} c_{\lambda k}^+ a_1^+ a_2 - i g_{12}^{\lambda k *} a_2^+ a_1 c_{\lambda k}$$

$\downarrow$ $\sum_{\lambda k}$ nehmen dann folgt Gleichung f. die Gesamtphotonzahl:

$$\dot{n}_{ph}(t) = -i \sum_{\lambda k} g_{12}^{\lambda k *} \underbrace{\langle a_2^+ a_1 c_{\lambda k} \rangle}_{\text{höhere Korrelation (Operatorzahl > 2)}} + c.c. \overset{\text{letzte VL}}{=} -\dot{f}_2(t)$$



Suche ein gekoppeltes System f. f_1, f_2, n_{ph}

$$\boxed{\dot{n}_{ph} = -\dot{f}_2} \;\widehat{=}$$

wenn Photon entsteht (zeitliche Änderg.) so muß ein e^- aus dem oberen Zustand verschwinden

$$f_1 + f_2 = 1$$

Idee: Gleichg. f. $\langle a_2^+ a_1 c_{\lambda k} \rangle$ aufschreiben

und später faktorisieren

$$\frac{d}{dt}\left(c_{\lambda k}\, a_2^+ a_1\right) = \dot{c}_{\lambda k}\,\left(a_2^+ a_1\right) + c_{\lambda k}\,\left(a_2^+ a_1\right)^{\bullet}$$

von oben abschreiben ... an letzter VL

$$p_{21} \equiv a_2^+ a_1$$

2

ω_0 $\quad \Delta\varepsilon = \hbar\omega_0 > 0$

1

$$= \left(-i\omega_k c_{\lambda k} + i g_{12}^{\lambda k} p_{12}\right) p_{21}$$

$$+ c_{\lambda k}\left(-i\,(\overbrace{\omega_1 - \omega_2}^{-\omega_0})\, p_{21} + i \sum_{\lambda' k'} g_{12}^{\lambda' k'} \overbrace{\left(a_2^+ a_2 - a_1^+ a_1\right)}^{\equiv \Delta_{21} \text{ „Inversion"}} c^+_{\lambda' k'}\right)$$

$$= -i(\omega_k - \omega_0)\, c_{\lambda k}\, p_{21} + i g_{12}^{\lambda k}\, \underbrace{p_{12} p_{21}}_{(1)}$$

$$+ i \sum_{\lambda' k'} g_{12}^{\lambda' k'}\, \underbrace{c_{\lambda k}\, c^+_{\lambda' k'}}_{(2)}\, \Delta_{21}$$

(1) $\quad p_{12} p_{21} = a_1^+ a_2 a_2^+ a_1 = \underline{\underline{a_1^+}} \left(1 - a_2^+ a_2\right) a_1 = \underline{\underline{a_1^+ a_1}}$

$\quad$ f. EW $\langle a_1^+ a_1 \rangle \to f_1$ ✓ $\qquad$ angewandt auf EW f. 1. Elektronzustand $\equiv 0$

(2) $\quad c_{\lambda k}\, c^+_{\lambda' k'}\, \Delta_{21} =$

$$\left(\underline{\underline{\delta_{kk'}^{\lambda\lambda'}}} + c^+_{\lambda' k'}\, c_{\lambda k}\right) \Delta_{21}$$

f. EW $\quad \delta^{\lambda\lambda'}_{kk'}\left(\underline{\langle a_2^+ a_2\rangle} - \langle a_1^+ a_1\rangle\right) + \underbrace{\langle c^+_{\lambda'k'} c_{\lambda k}\, \Delta_{21}\rangle}$

$$\underline{\underline{\delta^{\lambda\lambda'}_{kk'}\left(f_2\right.}} \left. - f_1\right) \qquad \langle c^+_{\lambda'k'} c_{\lambda k}\rangle\langle \Delta_{21}\rangle$$

$\Uparrow \qquad \nearrow$

1./ Näherung daß Elektr. und Licht schwach wechselwirken

$\rightarrow$ statistisch unabhängig

2/ $\langle c^+_{\lambda'k'} c_{\lambda k}\rangle = \delta^{\lambda\lambda'}_{kk'} \langle c^+_{\lambda k} c_{\lambda k}\rangle$

Photzahl diagonal

$\lambda'k' \neq \lambda k \rightarrow$ beschreibt Kohärenz

$\lambda k'$

λk

$\downarrow$

$$(*) \quad \frac{d}{dt} \underbrace{g^{\lambda k}_{21}\langle c_{\lambda k} P_{21}\rangle(t)}_{\text{geht ein in die Photonenzahlgleichung}} = -i(\omega_k - \omega_0)\langle c_{\lambda k} P_{21}\rangle(t) + i\,|g^{\lambda k}_{12}|^2\left(f_2(t) + n_{k\lambda}(t)\left(f_2(t) - f_1(t)\right)\right)$$

$\Uparrow \quad \langle c^+_{\lambda k} c_{\lambda k}\rangle$

$$-\dot n_{ph} = \underline{\underline{\dot f_2}} = \dots \underbrace{g^{\lambda k}_{21}\langle c_{\lambda k} P_{21}\rangle} \dots$$

Formel wird * gelöst und eingesetzt

$$g^{\lambda k}_{21}\langle c_{\lambda k} P_{21}\rangle = i\,|g^{\lambda k}_{12}|^2 \int^t dt'\, e^{-i(\omega_k - \omega_0)(t-t')} \left\{ f_2(t') + [f_2(t') - f_1(t')]\, n_{\lambda k}(t') \right\}$$

$-\infty$

= spezielle Lsg. der inhomog. Dgl

einsetzen in ρ_2 - Gleichung

$$\dot{\rho}_2 = -2 \sum_{\lambda k} |g_{12}^{\lambda k}|^2 \, \mathrm{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{t} dt' \, e^{-i(\omega_k - \omega_0)(t-t')} \underbrace{\left(\rho_2(t') + \left(\rho_2(t') - \rho_1(t') \right) n_{k\lambda}(t') \right)}_{F(t')} \right\}$$

Anfang der Licht-Materie WW bei $-\infty$

$s = t - t'$ Substitution

$$\int_0^\infty ds \, e^{-i(\omega_k - \omega_0) s} \, F(t-s)$$

weglassen

F soll eine langsam veränderliche Größe sein auf Zeitskala der Oszillation ω_k, ω_0

$\rho_2, \rho_1, n_{k\lambda}$ sollen langsam sein

$$\approx -2 \sum_{\lambda k} |g_{12}^{\lambda k}|^2 \, \mathrm{Re} \int_0^\infty ds \, e^{-i(\omega_k - \omega_0) s} \, F(t)$$

$e^{-\gamma_0 s}$ Konvergenz erzeugender Faktor, am Ende $\gamma_0 \to 0$

$$= -2 \sum_{\lambda k} |g_{12}^{\lambda k}|^2 \, \mathrm{Re} \left. \frac{e^{(-i(\omega_k - \omega_0) - \gamma_0) s}}{-i(\omega_k - \omega_0) - \gamma_0} \right|_0^\infty \rho(t)$$

$$= -2 \sum_{\lambda k} |g_{12}^{\lambda k}|^2 \underbrace{\frac{\gamma_0}{\gamma_0^2 + (\omega_k - \omega_0)^2}}_{\substack{\gamma_0 \to 0 \\ \hat{=}\, \pi\, \delta(\omega_k - \omega_0)}} \rho(t)$$

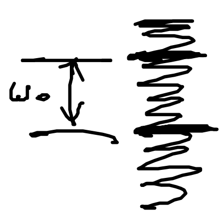
Elektronendichtegleichung:

$$\boxed{\dot{\rho}_2 = -\Gamma \rho_2 - \Gamma (\rho_2 - \rho_1) n_0}$$

und $\Gamma = 2\pi \sum_{\lambda k} |g_{12}^{\lambda k}|^2 \, \delta(\omega_k - \omega_0)$

Rate der spontanen Emission

$n_{\lambda k} \to n_0$ an der Stelle $\omega_k = \omega_0$



n_0 – resonant mit dem ZNS

Photonzahl die resonant mit ω_0 ist

$$\boxed{\dot{n}_0 = +\Gamma f_2 + \Gamma(f_2 - f_1)n_0}$$

Photonzahlgleichung

$\to f_2, n_0$, $\boxed{f_1 + f_2 = 1}$

damit ist die WW von Licht und ZNS komplett bestimmt.

Diskussion

- stellen ein geschlossenes Dgl.-System dar
- heißen Rategleichungen weil Dynamik d. Besetzungszahlen, nicht der Übergangsamplituden, Rate: Γ mit $[\Gamma] = \frac{1}{s}$
- Γ wird in ÜA ausgerechnet
- die Ersetzung $\dot{f} \sim \int_0^\infty ds\, f(t-\cancel{s}) \ldots$

denn $\underline{\dot{f}(t)} \sim \int ds\, \underline{f(t)} \ldots$

heißt Markoffnäherung da Gedächtniseffekte i. $f(t')$

$t' < t$ weggelassen wurde.

(Näherung geht nur wenn $\Gamma \ll \omega_0, \omega_k$
siehe oben)

- $\exists$ Term proportional zu u_0, $\exists$ Term nicht proportional zu u_0

$$\dot f_2 = -\underbrace{\Gamma f_2}_{} - \Gamma (f_2 - f_1)\, u_0$$

spontane Prozesse ohne Vorhandensein v. Photonen

induzierte Prozesse, durch Photon

(i) spontane Prozesse   rechte Seite: $u_0 \ll 1$

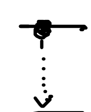
$$\dot u_0 = +\Gamma f_2$$

$$\dot f_2 = -\Gamma f_2 \longrightarrow f_2 = f_2^0\, e^{-\Gamma t}$$

AB $t=0$

Anfang:

f_2^0

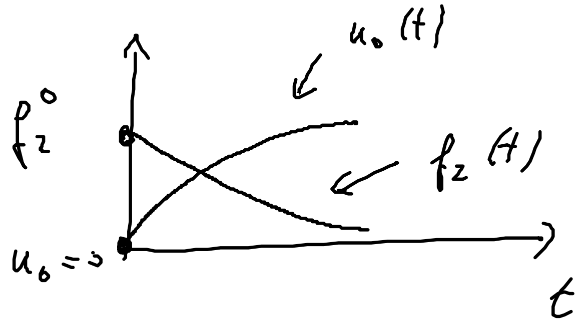


$u_0 \approx 0$

$$\dot u_0 = \Gamma f_2^0\, e^{-\Gamma t}$$

d. Integrieren löse mit $u_0(t=0) = 0$

$$\rightsquigarrow u_0 = (1 - e^{-\Gamma t})\, f_2^0$$



„Lampenlicht"
spontane Emission,
kein n_0 nötig!

(ii) stimulierte Prozesse

spontanen Term weglassen.
nehme nur Term mit n_0 mit

$\Delta = f_2 - f_1$

$$\dot n_0 = T(f_2 - f_1)\, n_0 \longrightarrow \boxed{\dot n_0 = T \Delta n_0}$$
$$\dot f_2 = -T(f_2 - f_1)\, n_0 \longrightarrow \boxed{\dot \Delta = -2T \Delta n_0}$$

f_2
f_1

Inversion $\Delta = f_2 - f_1$ einführen (Besetzungszahldifferenz)

$$f.\ \dot\Delta = (f_2 - f_1)^{\cdot}$$

$$f_1 + f_2 = 1 \quad = (2 f_2 - 1)^{\cdot} = 2 \dot f_2$$

ist nichtlineares Gleichungssystem, kann gelöst werden (Trennung d. Variablen)

sehe hier nur stationäre Zustand an!

$$\dot\Delta = 0 = \dot n_0$$

$$\rightarrow n_0^0 \neq 0, \quad \Delta^0 = 0 \quad \rightarrow$$

f_2
f_1

$f_2 = f_1$

Kleine Störung an diesen Zustand:

$$\Delta = \Delta^\circ + \delta\Delta(t) \quad \text{z.B. } f_2 > f_1 \,,\ f_1 > f_2$$

$$u_0 = u_0^\circ + \delta u(t) \implies \text{einsetzen oben}$$

$$\frac{d}{dt}\left(u_0^\circ + \delta u(t)\right) = \Gamma\left(\Delta^\circ + \delta\Delta\right)\left(u_0^\circ + \delta u\right)$$

$$= \underbrace{\Gamma\Delta^\circ u_0^\circ}_{=0} + \underbrace{\Gamma\Delta^\circ\delta u}_{(\Delta^\circ=0)\ =0} + \underbrace{\Gamma\delta\Delta\, u_0^\circ}_{\text{ansehen}} + \underbrace{\Gamma\delta\Delta\,\delta u}_{=0 \text{ weil klein}}$$

$$\boxed{\dot{\delta u} = \Gamma\,\delta\Delta\, u_0^\circ}$$

dasselbe mit Δ:

$$\boxed{\dot{\delta\Delta} = -2\Gamma\,\delta\Delta\, u_0^\circ} \longrightarrow \delta\Delta = \underbrace{\delta\Delta^\circ}_{\text{Anfangs-Störung}} e^{-2\Gamma u_0^\circ t}$$

diese linearen Gleichungen sind lösbar

$$\dot{\delta u} = \Gamma\,\delta\Delta\, u_0^\circ \rightarrow \text{1 Integral}$$

$$\delta u - \underbrace{\delta u^\circ}_{\text{kleine Störung bei } t=0} = +\left(1 - e^{-2\Gamma u_0^\circ t}\right)\frac{\delta\Delta^\circ}{2}$$

kurze Zeit $\approx \delta \Delta^{\circ}\, \underline{\underline{n_0^{\circ}}}\, T\, t$

$\delta n > 0$ steigt wenn $\delta \Delta^{\circ} > 0$ $\rightarrow$ $\rho_2 \downarrow \rho_1$ $\rho_2 > \rho_1$

steigt proportional zu n_0°

für Inversion > 0 steigt die Photonzahl in dem Maß wie bereits Photonen $\underline{\underline{n_0^{\circ}}}$

da sind $\hat{=}$ stimulierte Emission

f. Inversion < 0 sinkt die Photonzahl $\hat{=}$ ~~stimulierte~~ Absorption

Absorption ist immer stimuliert