c) Ratengleichungen f. Photonen, Elektronen

Suchen gekoppeltes System

$$f_1 = \langle a_1^\dagger a_1 \rangle, \quad f_2 = \langle a_2^\dagger a_2 \rangle, \quad n_{ph} = \sum_{\lambda k} \langle c_{\lambda k}^\dagger c_{\lambda k} \rangle$$

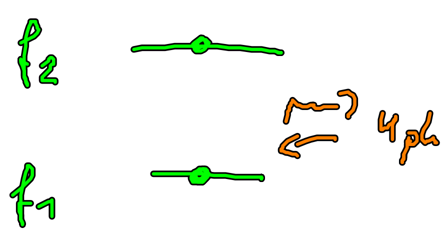
$$\dot{c}_{\lambda k} = -i\omega_k c_{\lambda k} + i g_{12}^{\lambda k} a_1^\dagger a_2 \qquad \Big| \, c_{\lambda k}^\dagger \cdot$$

$$\dot{c}_{\lambda k}^\dagger = +i\omega_k c_{\lambda k}^\dagger - i g_{12}^{\lambda k *} a_2^\dagger a_1 \qquad \Big| \cdot c_{\lambda k}$$

$$\Downarrow \quad \frac{d}{dt} \langle c_{\lambda k}^\dagger c_{\lambda k} \rangle = i g_{12}^{\lambda k} c_{\lambda k}^\dagger a_1^\dagger a_2 - i g_{12}^{\lambda k *} a_2^\dagger a_1 c_{\lambda k}$$

$\Rightarrow \sum_{\lambda k}$ nehmen dann folgt Gleichung f. die Gesamtphotonzahl:

$$\dot{n}_{ph}(t) = -i \sum_{\lambda k} g_{\lambda k}^{\lambda k *} \underbrace{\langle a_2^\dagger a_1 c_{\lambda k} \rangle}_{\text{höhere Korrelation (Operatorzahl > 2)}} + c.c. \overset{\text{lokal VL}}{=} -\dot{f}_2(t)$$



Suche ein gekoppeltes System f. f_1, f_2, n_{ph}

$f_1 + f_2 = 1$

$$\boxed{n_{ph} = -\dot{f}_2} \; \hat{=}$$

wenn Photon entsteht (zeitliche Änderg.) so muß ein e^- aus dem oberen Zustand verschwinden

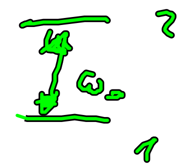
Idee: Gleichg. f. $\langle a_2^+ a_1 \, c_{\lambda k} \rangle$ aufschreiben

und später faktorisieren

$$\frac{d}{dt}\left(c_{\lambda k}\, a_2^+ a_1\right) = \dot{c}_{\lambda k}\left(a_2^+ a_1\right) + c_{\lambda k}\,\left(a_2^+ a_1\right)^{\bullet}$$

von oben abschreiben   aus letzter VL

$$P_{21} \equiv a_2^+ a_1$$



$\Delta E = \hbar\omega_0 > 0$

$$= \left(-i\omega_k c_{\lambda k} + i g_{12}^{\lambda k} P_{12}\right) P_{21}$$

$$+ c_{\lambda k}\left(-i\,(\overbrace{\omega_1-\omega_2}^{-\omega_0})\,P_{21} + i\sum_{\lambda' k'} g_{12}^{\lambda' k'} \overbrace{\left(a_2^+ a_2 - a_1^+ a_1\right)}^{\equiv \Delta_{21} \text{ „Inversion"}} c_{\lambda' k'}^+ \right)$$

$$= -i\left(\omega_k - \omega_0\right) c_{\lambda k} P_{21} + i g_{12}^{\lambda k} \underbrace{P_{12} P_{21}}_{(1)}$$

$$+ i \sum_{\lambda' k'} g_{12}^{\lambda' k'} \underbrace{c_{\lambda k}\, c_{\lambda' k'}^+}_{(2)} \Delta_{21}$$

(1) $\quad P_{12} P_{21} = a_1^+ a_2\, a_2^+ a_1 = a_1^+ \left(1 - a_2^+ a_2\right) a_1 = a_1^+ a_1$

angewandt auf EW f. 1. Elektronzustand $\equiv 0$

f. EW $\langle a_1^+ a_1 \rangle \to f_1$ ✓

(2) $\quad c_{\lambda k}\, c_{\lambda' k'}^+ \Delta_{21} =$

$$\left(\delta_{kk'}^{\lambda\lambda'} + c_{\lambda' k'}^+ c_{\lambda k}\right) \Delta_{21}$$

f. EW $\delta^{\lambda\lambda'}_{kk'}\left(\langle a_2^+ a_2\rangle - \langle a_1^+ a_1\rangle\right) + \underbrace{\langle c^+_{\lambda' k'} c_{\lambda k}\,\Delta_{21}\rangle}$

$\delta^{\lambda\lambda'}_{kk'}\left(f_2 - f_1\right)$

$\langle c^+_{\lambda' k'} c_{\lambda k}\rangle\langle\Delta_{21}\rangle$

1./ Näherung daß Elektronen und Licht schwach wechselwirken
→ statistisch unabhängig

2/ $\langle c^+_{\lambda' k'} c_{\lambda k}\rangle = \delta^{\lambda\lambda'}_{kk'}\langle c^+_{\lambda k} c_{\lambda k}\rangle$

Photonzahl diagonal

$\lambda' k' \neq \lambda k$ → beschreibt Kohärenz

$\lambda k'$

λk

(*) $\frac{d}{dt}\underbrace{g^{\lambda k}_{21}\langle c_{\lambda k} P_{21}\rangle(t)}_{\text{geht ein in die Photonenzahlgleichung}} = -i(\omega_k - \omega_0)\langle c_{\lambda k} P_{21}\rangle(t)$

$+ i|g^{\lambda k}_{12}|^2\left(f_2(t) + n_{k\lambda}(t)\left(f_2(t) - f_1(t)\right)\right)$

$\langle c^+_{\lambda k} c_{\lambda k}\rangle$

$-\dot{n}_{ph} = \dot{f}_2 = \cdots \underbrace{g^{\lambda k}_{21}\langle c_{\lambda k} P_{21}\rangle}\cdots$

formal wird * gelöst und eingesetzt

$g^{\lambda k}_{21}\langle c_{\lambda k} P_{21}\rangle = i|g^{\lambda k}_{12}|^2\int^t dt' e^{-i(\omega_k-\omega_0)(t-t')}\left\{f_2(t') + \left[f_2(t') - f_1(t')\right]n_{\lambda k}(t')\right\}$

$-\infty$

= spezielle Lsg. der inhomog. Dgl

einsetzen in ρ_2-Gleichung

$$\dot{\rho}_2 = -2\sum_{\lambda k} |g^{\lambda k}_{12}|^2 \,\mathrm{Re}\left\{\underbrace{\int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{-i(\omega_k-\omega_0)(t-t')} \underbrace{\left(\rho_2(t') + \left(\rho_2(t') - \rho_1(t')\right) n_{\lambda k}(t')\right)}_{F(t')}}_{s = t - t' \text{ Substitution}}\right\}$$

Anfang der Licht-Materie WW bei $-\infty$

$$\int_0^\infty ds\, e^{-i(\omega_k-\omega_0)s}\, F(t-s)$$

weglassen

F soll eine langsam veränderliche Größe sein auf Zeitskala der Oszillation ω_k, ω_0

$\rho_2, \rho_1, n_{\lambda k}$ sollen langsam sein

$$\approx -2\sum_{\lambda k} |g^{\lambda k}_{12}|^2 \,\mathrm{Re}\int_0^\infty ds\, e^{-i(\omega_k-\omega_0)s}\, F(t)$$

$e^{-\gamma_0 s}$ Konvergenzerzeugender Faktor, am Ende $\gamma_0 \to 0$

$$= -2\sum_{\lambda k} |g_{12}^{\lambda k}|^2 \, \mathrm{Re} \, \frac{e^{(-i(\omega_k-\omega_0)-\gamma_0)s}}{-i(\omega_k-\omega_0)-\gamma_0}\Bigg|_0^\infty f(t)$$

$$= -2\sum_{\lambda k} |g_{12}^{\lambda k}|^2 \underbrace{\frac{\gamma_0}{\gamma_0^2+(\omega_k-\omega_0)^2}}_{\gamma_0 \to 0} f(t)$$

$$\hat{=}\ \pi\,\delta(\omega_k-\omega_0)$$

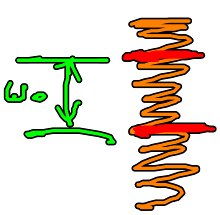
Elektronendichtegleichung:

$$\boxed{\dot f_2 = -\Gamma f_2 - \Gamma (f_2 - f_1)\, n_0}$$

und $\Gamma = 2\pi \sum_{\lambda k} |g_{12}^{\lambda k}|^2 \, \delta(\omega_k - \omega_0)$

Rate der spontanen Emission

$n_{\lambda k} \to n_0$ an der Stelle $\omega_k = \omega_0$



n_0 – resonant mit dem ZNS

Photonzahl die resonant mit ω_0 ist

$$\boxed{\dot{n}_0 = +\Gamma f_2 + \Gamma (f_2 - f_1) n_0}$$

Photonzahlgleichung

$\rightarrow f_2,\ n_0\ ,\ \boxed{f_1 + f_2 = 1}$

damit ist die WW von Licht und ZNS komplett bestimmt.

Diskussion

- stellt ein geschlossenes Dgl.-System dar
- heißen Ratengleichungen weil Dynamik d. Besetzungszahlen, nicht der Übergangsamplituden, Rate: Γ mit $[\Gamma] = \frac{1}{s}$
- Γ wird in ÛA angeordnet
- die Ersetzung $\dot{f} \sim \int_0^\infty ds\ f(t-\cancel{s}) \ldots$

durch $\dot{f}(t) \sim \int ds\ f(t) \ldots$

heißt Markoffnäherung da Gedächtniseffekte f. $f(t')$

$t' < t$ weggelassen wurde.

(Näherung geht nur wenn $\Gamma \ll \omega_0, \omega_k$
siehe oben)

• $\exists$ Term proportional zu n_0, $\exists$ Term nicht proportional zu n_0

$$\dot f_2 = -\underbrace{\Gamma}_{} f_2 - \Gamma (f_2 - f_1) \underline{n_0}$$

spontane Prozesse ohne Vorhandensein v. Photonen

induzierte Prozesse, durch Photon

(i) spontane Prozesse

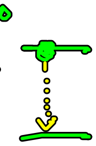
rechte Seite: $n_0 \ll 1$

$$\dot n_0 = +\Gamma f_2$$

$$\dot f_2 = -\Gamma f_2 \longrightarrow f_2 = f_2^0 e^{-\Gamma t}$$

AB $t=0$

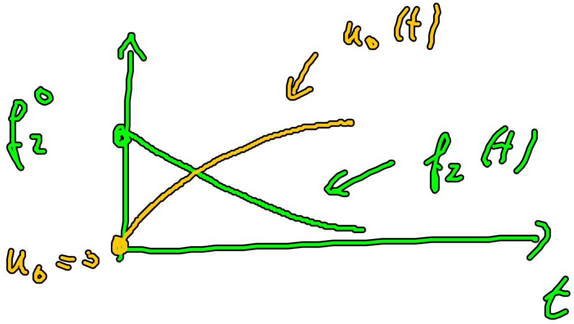
Anfang:

f_2^0  $n_0 \approx 0$

$$\dot n_0 = \Gamma f_2^0 e^{-\Gamma t}$$

d. Integrieren lösen mit $n_0(t=0) = 0$

$$\leadsto n_0 = (1 - e^{-\Gamma t}) f_2^0$$



„Lampe hilft"

spontane Emission,

kein n_0 nötig!

(ii) stimulierte Prozesse

spontane Terme weglassen.

nehme nur Terme mit n_0 mit

$\Delta = f_2 - f_1$

$$\dot n_0 = \Gamma (f_2 - f_1)\, n_0 \longrightarrow \boxed{\dot n_0 = \Gamma \Delta n_0}$$

$$\dot f_2 = -\Gamma (f_2 - f_1)\, n_0 \longrightarrow \boxed{\dot \Delta = -2\Gamma \Delta n_0}$$

f_2

f_1

Inversion $\Delta = f_2 - f_1$ einführen (Besetzungszahldifferenz)

$$\dot\Delta = (f_2 - f_1)^{\cdot}$$

$$f_1 + f_2 = 1: \quad = (2 f_2 - 1)^{\cdot} = 2 \dot f_2$$

ist nichtlineares Gleichungssystem, kann gelöst werden (Trennung d. Variablen)

sehe hier nur stationäre Zustand an!

$$\dot\Delta = 0 = \dot n_0$$

$$\to n_0^0 \neq 0, \quad \Delta^0 = 0 \quad \to$$

f_2

f_1

$f_2 = f_1$

Kleine Störung an diesen Zustand:

$$\Delta = \Delta^0 + \delta\Delta(t) \quad \text{z.B. } f_2 > f_1 \;,\; f_1 > f_2$$

$$u_0 = u_0^0 + \delta u(t) \implies \text{einsetzen oben}$$

$$\frac{d}{dt}\left(u_0^0 + \delta u(t)\right) = \Gamma\left(\Delta^0 + \delta\Delta\right)\left(u_0^0 + \delta u\right)$$

$$= \underbrace{\Gamma\Delta^0 u_0^0}_{=0} + \underbrace{\Gamma\Delta^0\delta u}_{(\Delta^0=0)\ =0} + \underbrace{\Gamma\delta\Delta\, u_0^0}_{\text{ansehen}} + \underbrace{\Gamma\delta\Delta\,\delta u}_{=0 \text{ weil klein}}$$

$$\boxed{\dot{\delta u} = \Gamma\,\delta\Delta\, u_0^0}$$

dasselbe mit Δ:

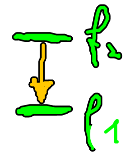
$$\boxed{\dot{\delta\Delta} = -2\Gamma\,\delta\Delta\, u_0^0} \longrightarrow \delta\Delta = \underbrace{\delta\Delta^0}_{\text{Anfangs-Störung}} e^{-2\Gamma u_0^0 t}$$

diese linearen Gleichungen sind lösbar

$$\dot{\delta u} = \Gamma\,\delta\Delta\, u_0^0 \rightarrow \text{1 Integral}$$

$$\delta u - \underbrace{\delta u^0}_{\text{kleine Störung bei } t=0} = +\left(1 - e^{-2\Gamma u_0^0 t}\right)\frac{\delta\Delta^0}{2}$$

kurze Zeit $\approx \delta \Delta^\circ \underline{n_0^\circ} \uparrow t$

$\delta n > 0$ steigt wenn $\delta \Delta^\circ > 0 \rightarrow$  $\rho_2 > \rho_1$

steigt proportional zu n_0°

für Inversion > 0 steigt die Photonzahl in dem Maß wie bereits Photonen $\underline{n_0^\circ}$ da sind $\hat{=}$ stimulierte Emission

f. Inversion < 0 sinkt die Photonzahl $\hat{=}$ ~~stimulierte~~ Absorption

Absorption ist immer stimuliert