(iii) Auswertung Laserprozess

$$\dot{n}_0 = \Gamma n_0 \Delta - 2\kappa n_0$$

$$\dot{\Delta} = -2\Gamma \Delta n_0 - \Gamma_p (\Delta - \Delta_p)$$

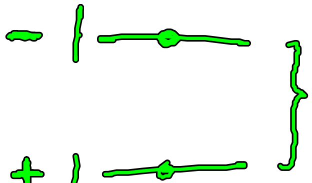
n_0 gleich Photon in einer Resonatormode

2 phänomenologische Ergänzungen:

- Verluste durch Auskopplung aus Resonator: $-2\kappa n_0$
  führt zu einer exponentiellen Dämpfung

- Pumpen der Inversion Δ zu einem Wert $\Delta_p > 0$
  mit der Rate Γ_p

$-\Gamma_p(\Delta - \Delta_p)$ sorgt dafür, daß $\Delta \to \Delta_p$ wenn kein weiterer Prozess aktiv ist: „Batteriebetrieb d. Zweiniveausystems"



$\Delta_p \equiv \rho_2^p - \rho_1^p$ sei > 0 f. Laser

Näherung $\dot{\Delta} = 0$, weil die Pumprate sehr hoch ist

$$\Gamma_p \Delta \gg \dot{\Delta}$$

die stationäre Lsg. umstellen nach Δ :

$$\Delta = \frac{\Gamma_p \, \Delta p}{(2\Gamma n_0 + \Gamma_p)}$$, einsetzen in $\dot{n}_0 = \dots$

$$\underbrace{\dot{n}_0 = \Gamma n_0 \frac{\Gamma_p \, \Delta p}{(2\Gamma n_0 + \Gamma_p)} - 2\kappa n_0}$$

Gleichung f. $n_0(t)$, also f. Photonen die sich im Laser aufbauen,

uns interessiert stationärer Zustand

$\dot{n}_0 = 0$ im laufenden Laserbetrieb

$\hat{=}$ konstanter Intensität

$$0 = n_0 \cdot \underbrace{\left(\Gamma \frac{\Gamma_p \, \Delta p}{(2\Gamma n_0 + \Gamma_p)} - 2\kappa \right)}_{=0}$$

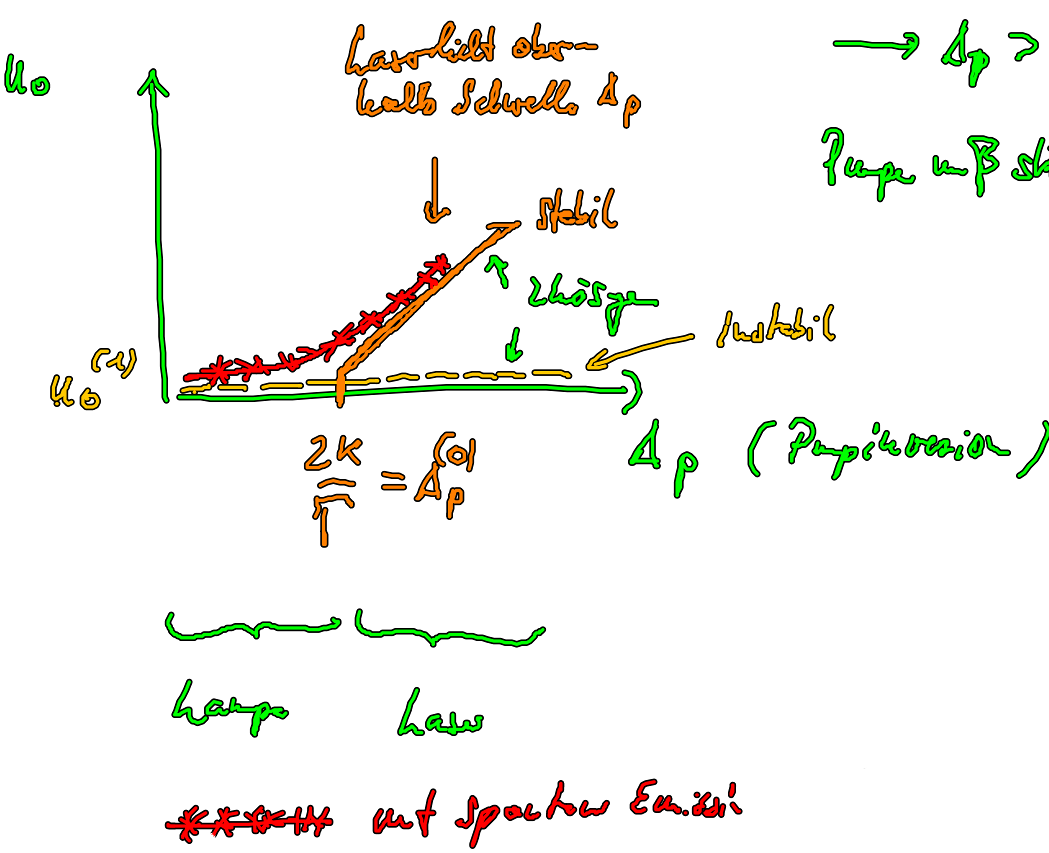
$n_0^{(1)} = 0$

kein Photon

nach n_0 umstellen:

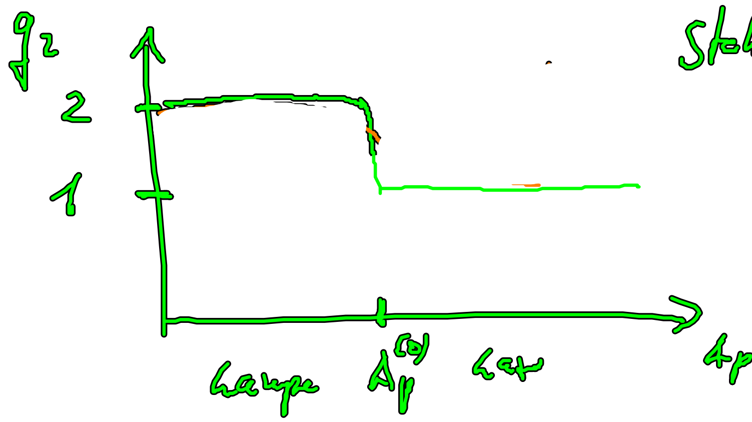
physikalisch:

$$n_0^{(2)} = \frac{\Gamma_p}{4\kappa} \underbrace{\left(\Delta p - \frac{2\kappa}{\Gamma} \right)} > 0$$



$\longrightarrow \Delta_p > \frac{2\kappa}{\hat{\Gamma}}$

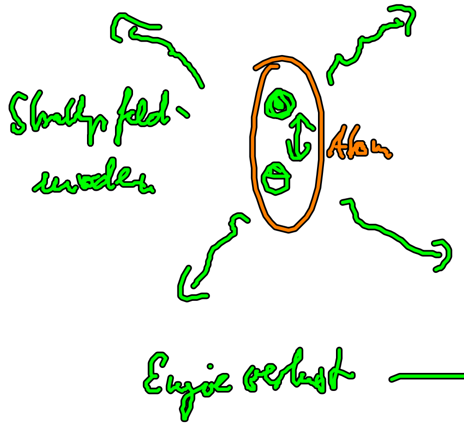
Pumpe muß stärker sein als Verluste



Stabilität d. Lichts

d) Strahlungsdämpfung

Dämpfung der Dipoldichte $\langle p_{12} \rangle = \langle a_1^+ a_2 \rangle$, Polarisation



$$\overset{\text{ÜA}}{\langle \dot{\rho}_{12} \rangle = i\,\omega_{12} \langle \rho_{12} \rangle - \gamma \langle \rho_{12} \rangle + i\,\delta_{12} \langle \rho_{12} \rangle}$$

Zerfall d. Dipoldichte E-Verschiebg.

e) Raten

$$\Gamma = \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^3 \frac{|d_{12}|^2}{\hbar \varepsilon_0} \frac{1}{3\pi} \sim \underline{\omega_0^3}, \sim \underline{|d_{12}|^2}$$

Auswahlregeln wichtig

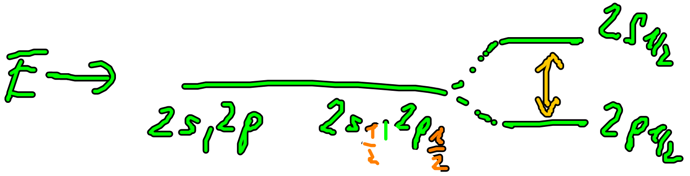
5.2. Aufhebung v. Entartungen durch das Vakuumstrahlungsfeld (Lambverschiebung)

a) Idee:

- Selbst wenn $\langle n_{\lambda k} \rangle = 0$, also Photonenvakuum liegen <u>Vakuumfluktuationen</u> vor.

→ unter Umständen Aufhebung v. Entartungen

prominente Bsp:



s,p Zustände: Entartg. aufgehoben

$\updownarrow \;\hat{=}$ Absorptionsprozess

„Lambshift"

Schrödinger, Pauli

Dirac $j = \frac{1}{2}$

Lamb, Hänsch

Bethe (nichtrelativ.)

Schwinger, Feynman

(relativistisch)

b) Störungstheorie f. Einfluß d. Vakuums auf E-Verschiebg. in Atomen

muß bis 2. Ordng. gerechnet werden

ΔE_n (1 Elektr. in Zustand n mit Umgebg. v. 0 Photonen) = ?

n – Quantenzahl Atom (p,s)

Zustände (QZ)

$$|\varphi_n\rangle = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & n & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\,0 \end{matrix}\right\rangle \left|\begin{matrix} k_1\lambda_1, & k_2\lambda_2, & \ldots, & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\rangle$$

El-Zelle

Elektronischer Zustand, photonischer Zustand

$\hat{=}$ Produkt ohne WW

erste Ordng Störungstheorie $\langle \varphi_n | H_{el-ph} | \varphi_n \rangle = 0$, denn

$a^+_{n_1} a_{n_2} (c_{\lambda k} + c^+_{\lambda k})$

jede Erzeugg. / Vernichtg. eines Photons bringt Orthogonalität der Photonzustände

$$\Delta E_n^{(2)} = \sum_x \frac{|\langle \varphi_n | H_{el-pt} | \varphi_x \rangle|^2}{E_n - E_x}$$

x: alle mögl. Zustände d. Hilbertraums
$x \neq n$

$$H^{(a)}_{el-pt} : \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2$$

Früher $\vec{r}\cdot\vec{E}$ soll nicht genommen werden, weil f. El. im freien Raum Dipolnäherg. zusammenbricht

$$= \frac{1}{2m}\vec{p}^2 - \underbrace{\frac{q}{m}\vec{A}\cdot\vec{p}}_{\text{WW-H}} + \cancel{A^2}$$

RW-Näherg. taucht dies nicht auf

(Coulombeichg $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$)

$$\vec{A} = \sum_{\lambda k} \underline{\underline{f_k}}\, \vec{e}_{\lambda k}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, c_{\lambda k}(t) + \text{h.a.}$$

$$H_{el-pt} = -\sum_{\substack{n_1 n_2\\ \lambda k}} g^{\lambda k}_{n_1 n_2}\left(a^+_{n_1} a_{n_2} c_{\lambda k} + \text{h.a.}\right)$$

$$g^{\lambda k}_{n_1 n_2} = \frac{q}{m}\left(\frac{2\hbar\omega_k\varepsilon_0 V}{\hbar_k}\right)^{-1/2}\int d^3r\,\varphi^*_{n_1}(\vec r)\,\vec e_{\lambda k}\cdot\vec p\;\varphi_{n_2}(\vec r)$$

$$\left(e^{i\vec k\vec r}\right)$$

Matrixelement^2

$$\Delta\varepsilon_n^{(2)} = \sum_{n'\lambda k}\frac{|g^{\lambda k}_{nn'}|^2}{\varepsilon_n - \underbrace{\varepsilon_{n'} - \hbar\omega_k}}$$

(ohne Beweis, 3 Zeilen)

Zustandsenergie d. ungestörten d. Zustands

alle and. Zustandsenergien die über zählen beitragen.

$$= \sum_{n'\lambda k}\frac{q^2}{m^2}\frac{1}{2\hbar\omega_k\varepsilon_0 V}\,|\vec p_{nn'}\cdot\vec e_{\lambda k}|^2\,\frac{1}{\varepsilon_n-\varepsilon_{n'}-\hbar\omega_k}$$

$$\sum_k \to \int d^3k\,\frac{V}{(2\pi)^3}$$

$$\omega = ck$$

$$= \sum_{n'}\frac{\cancel{V}}{(2\pi)^3}\int dk\,k^2\sum_\lambda\underbrace{\int d\Omega_k}_{\text{Winkel}}\frac{|\vec p_{nn'}\cdot\vec e_{\lambda k}|^2}{\varepsilon_n-\varepsilon_{n'}-\hbar\omega_k}\,\frac{q^2}{2\hbar\varepsilon_0\omega_k\cancel{V}m^2}$$

$$= \frac{1}{6\pi^2}\,\frac{q^2}{\hbar\varepsilon_0 m^2c^3}\sum_{n'}\int_0^\infty d\omega\,\omega\,\frac{|p_{nn'}|^2}{\varepsilon_n-\varepsilon_{n'}-\hbar\omega} = \infty$$

für große $\omega \to \infty$

Integrand $\sim \frac{\omega}{\omega} \to 1$

Idee v. Bethe:

in Exp. wird endlich Masse gemessen.

also die Vakuum fluktuationen sind darin enthalten!

$\longrightarrow$ die ∞ Teil wird jetzt gedacht in die exp. Masse geschoben

b) freies Elektron in WW mit Vakuum

$$|n\rangle \to |\vec{k}\rangle \;\hat{=}\; \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \qquad \vec{k}:\text{ ebene Welle}$$

Achtg.: $\vec{k}$ ist Elektron wellenvektor nicht Licht!

$$\Delta E^{(2)}_{\vec{k}} = ?$$

$$p_{k'n} = \langle \vec{k}' | \vec{p} | \vec{k} \rangle = \int d^3r \, \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \, \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{1}{\sqrt{V}}$$

$$= \frac{\hbar}{i}(i\vec{k})\,\delta(\vec{k}-\vec{k}') \sim \hbar\vec{k}\,\delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$

$$\Delta E^{(2)}_{\vec{k}} = \frac{1}{6\pi^2}\frac{e^2}{\hbar\varepsilon_0 m^2 c^3}\int d\omega\,\omega \sum_{k'} \frac{(\hbar k)^2\,\delta_{kk'}}{E_k - E_{k'} - \hbar\omega}$$

$$= -\frac{\hbar^2 k^2}{2}\cdot\alpha$$

$$\alpha = \frac{1}{3\pi^2}\frac{e^2}{\hbar^2\varepsilon_0 m^2 c^3}\int_0^\infty d\omega = \infty$$

$$E_{\text{mit Vakuum}} = \underbrace{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}}_{\text{nackte Energie}} - \frac{\hbar^2 k^2}{2}\alpha \equiv \underline{\underline{\frac{\hbar^2 k^2}{2 m_{exp}}}}$$

Elektronenenergie mit Vakuum

c) Anwendung auf gebundene Elektronen

$$H = \frac{p^2}{2m} + \underbrace{V(\vec{r})}_{\text{Kern}} + H_{el-pt}$$

$$= \frac{p^2}{2m_{exp}} + V(\vec{r}) + \underbrace{H_{el-pt} + \frac{\alpha \vec{p}^{\,2}}{2}}_{\text{neue Störung f. das „experimentelle" Elektron}}$$

alles wie vorher aber $\frac{\alpha \vec{p}^{\,2}}{2}$ noch addieren!

$$\Delta E_n^{(2)} \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{6\pi^2}\frac{e^2}{\hbar^2 \varepsilon_0 m^2 c^3}}_{\alpha/2}\left[\underbrace{\int_0^\infty d\omega\, \omega \sum_{n'} \frac{(p_{nn'})^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega}}_{\text{alt}} + \underbrace{\int_0^\infty d\omega\, \omega \frac{p_{nn}^2}{\hbar\omega}}_{\text{neuer Hilfsterm}}\right]$$

$$\langle n|p^2|n\rangle = \sum_{n'} \langle n|p|n'\rangle\langle n'|p|n\rangle = \sum_{n'} (p_{nn'})^2$$

$$= \frac{\alpha}{2} \int_0^\infty d\omega\, \cancel{\omega} \sum_{n'} |p_{nn'}|^2 \underbrace{\left(\frac{1}{E_n - E_{n'} - \hbar\omega} + \frac{1}{\hbar\omega} \right)}_{\underbrace{\frac{1}{\hbar \cancel{\omega}} \left(\frac{E_n - E_{n'}}{E_n - E_{n'} - \hbar\omega} \right)}_{\text{Integrand, nicht mehr so stark divergent}}}$$

$=$

$$\underbrace{\int d\omega}_{\text{frei}} \to \underbrace{\int d\omega \frac{1}{\omega}}_{\text{angezogenes Elektron}} \sim \ln\omega$$

nicht mehr so schlimm divergent

in relativistischer Theorie wird das Integral bei Compton-wellenlänge/frequenz abgeschnitten

$$\int_0^{\omega_{max}} d\omega$$

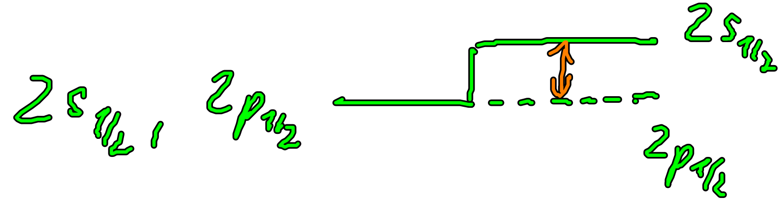
durch Abschneiden

$$\Delta E_n^{(2)} = \frac{\alpha}{2} \sum_{n'} |p_{nn'}|^2 (E_n - E_{n'}) \ln \left| \frac{mc^2}{\hbar\omega_{n'} - \hbar\omega_n} \right|$$

$\to$ ist endlich

$$\sim \underbrace{|\varphi_n(\vec{r}=0)|^2}_{\text{Wasserstoff}} \neq 0 \text{ f. s-Zustände}$$

in Atom



Die s-Zustände d. H-Atoms
werden d. das Vakuumfeld verschoben.
p, s → Aufspaltung