VI Relativistische Quantentheorie

- Problem: S. Gl ist nicht-relativistisch, denn es werden Raum & Zeit ungleich behandelt:

$$i\hbar\, \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

1. Ordnung 2. Ordnung

$\longrightarrow$ 2 Mgl. für Korrektur:

(a) weitere Zeitableitung zufügen $\longrightarrow$ Klein-Gordon-Gl. (Spin 0)

(b) weglassen einer Ortsableitung $\longrightarrow$ Dirac-Gl. (Spin $\frac{1}{2}$)

0. Wiederholung der relativistischen Beschreibung

(1) Raum u. Zeit werden zur Raumzeit verknüpft

$\longrightarrow$ Einführung von 4er Vektor für Ereignisse

- kontravariant: $x^\mu = (ct, \vec{r}) = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$
- kovariant: $x_\mu = (ct, -\vec{r}) = (ct, -x, -y, -z) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$

- Index : griechisch $\mu = 0,1,2,3$ Raumzeit
  lateinisch $i = 1,2,3$ Raum

- Lorentzmetrik : $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$

  mit $g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$

→ Wechseln : $x^{\mu} = g^{\mu\nu} x_{\nu}$ und $x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu}$

→ Einstein'sche Summenkonvention : über gleiche Indices (einer hoch- und einer tiefgestellt) wird summiert

(2) Eigenzeitintervall
(Wegelement der Raumzeit)

- Quadrat des Ereignisabstandes der Ereignisse mit Koord. x^{α} und $x^{\alpha} + dx^{\alpha}$

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu} = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$= c^2 dt^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \underbrace{\left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right\}}_{\dot{r}^2} \right]$$

mit $d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}}\, dt$

$$= \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}\, dt$$

Invariant in verschiedenen Inertialsystemen (IS)

→ Parameterdarstellung der Raumzeit

$$x^\mu(\tau) = (c\,t(\tau),\, x(\tau),\, y(\tau),\, z(\tau))$$

(3) 4er Impuls als Fkt. von τ

$$p^\mu = m_0 \frac{d}{d\tau} x^\mu(\tau) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}} \frac{d}{dt}(ct, x, y, z)$$

m_0 - Ruhemasse

$$= (m(t)\,c,\; m(t)\,\dot{x},\; m(t)\,\dot{y},\; m(t)\,\dot{z})$$

Da $E = m(t)c^2 \rightarrow \frac{E}{c} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ folgt

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \quad \text{mit} \quad \vec{p} = m(t)\dot{\vec{r}}$$

(4) Länge eines 4er Vektors ist invariant unter IS-Wechsel

$$p^\mu p_\mu = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$$

$$= \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^{\,2} = \frac{m_0^2 c^2}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2} - m^2(t) v^2 = m_0^2 c^2$$

(5) Relativistische Energie-Impuls-Beziehung

aus (4) folgt: $\boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$

Wenn sich ein Objekt mit Geschwindigkeit $\frac{v}{c} < 1$ (mit v in Größenordnung von c) bewegt:

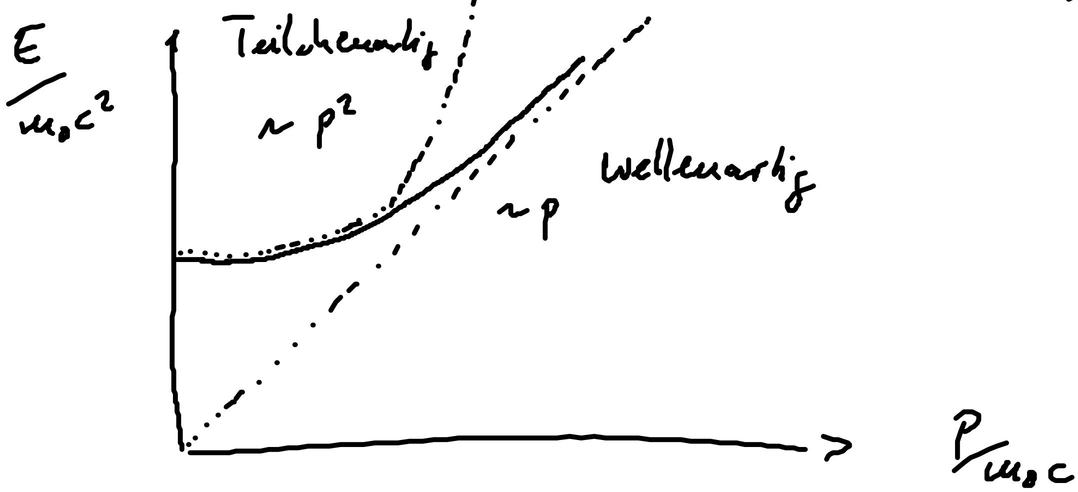
$$E(p) = (m_0^2 c^4 + p^2 c^2)^{\frac{1}{2}} \simeq \begin{cases} m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m} & \text{für } p \ll m_0 c \\ pc & \text{für } p \gg m_0 c \end{cases}$$

→ $\frac{p^2}{2m}$ aus klass. nicht-rel. Mechanik : Teilchen

→ pc de Broglie $p = \hbar k$, $E = \hbar\omega$

$\omega = ck$ Wellenanregung

$E(p)$ „interpoliert" zwischen Teilchen u. Feldern



→ Eine einheitliche Beschreibung von Felder u. Teilchen muß relativistisch und qm sein

$E(p)$ $p = \hbar k$, $E = \hbar\omega$

1. Die Klein-Gordon-Gleichung

1.1. Herleitung

- Schröd. Gl. aus de-Broglie Relation:

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad \text{via} \quad E \to i\hbar\partial_t \quad , \quad p \to \frac{\hbar}{i}\nabla$$

$$\to \quad i\hbar\partial_t \Psi = + \frac{p^2}{2m}\Psi$$

- relativ. Energie-Impuls Beziehung: $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$

$$-\hbar^2\partial_t^2 \Psi(\vec{r},t) = \left(-\hbar^2c^2\nabla^2 + m_0^2c^4\right)\Psi(\vec{r},t)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\Psi(\vec{r},t) = 0$$

- in 4er Schreibweise: $\Box = \partial_\mu\partial^\mu = (\partial_{ct}, \partial_x, \partial_y, \partial_z)\cdot$

$$(\partial_{ct}, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_t)$$

$$\boxed{\left(\Box + \frac{1}{\lambda_c^2}\right)\Psi(\vec{r},t) = 0}$$

Klein-Gordon-Gl. für rel. Teilchen

mit Compton-Wellenlänge $\lambda_c = \frac{\hbar}{m_0 c}$

1.2 Kontinuitätsgleichung

- Erinnerung S.-Gl.:
  - W. dichte : $\rho = |\Psi|^2$

- W. stromdichte : $\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*\right)$

$\longrightarrow \nabla \cdot \vec{j} + \dot{\rho} = 0$

Ermöglicht die Interpretation des Schrödinger Formulierung als statistische Theorie die Wahr. aussagen macht

- Klein-Gordon-Funktion Ψ:

$\underline{\text{I}} \quad \Psi^* \left(\partial_\mu \partial^\mu + \lambda_c^{-2}\right) \Psi = 0$

$\underline{\text{II}} \quad \Psi \left(\partial_\mu \partial^\mu + \lambda_c^{-2}\right) \Psi^* = 0$

(1) konjugieren und mit Ψ / Ψ^* multiplizieren

(2) Differenz bilden : $\underline{\text{I}} - \underline{\text{II}}$

$$\partial_\mu \left(\Psi^* \partial^\mu \Psi\right) - \partial_\mu \left(\Psi \partial^\mu \Psi^*\right) = 0$$

(3) Multiplizieren mit $\frac{\hbar i}{2m_0}$

$$\partial_t \left(\frac{i\hbar}{2m_0 c^2}\left(\Psi^* \partial_t \Psi - \Psi \partial_t \Psi^*\right)\right)$$

$$- \vec{\nabla} \cdot \frac{i\hbar}{2m_0}\left(\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \nabla \Psi^*\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{mit}$$

- K-G-Dichte : $\rho = \frac{i\hbar}{2m_0 c^2}\left(\Psi^* \partial_t \Psi - \Psi \partial_t \Psi^*\right)$

- Stromdichte : $j^i = \frac{\hbar}{2m_0 i}(\Psi^* \partial_i \Psi - \Psi \partial_i \Psi^*)$

· Problem : ρ ist nicht positiv definit, also evtl. $\rho < 0$

$\longrightarrow$ Keine Wahr.interpretation mehr mgl.

· Grund : Klein-Gordon-Gl (KGG) ist DGl. 2.Ord. Anfangswerte für Ψ und $\dot{\Psi}$ zu einem festen Zeitpunkt können unabhäng. gewählt werden

· Idee : Ladungsdichteinterpretation (später)

1.3 Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung

· Erinnerung E-Dynamik :

Ebene Wellen sind Lsg. der Wellengl. und bilden Basis nach dem jede Lsg entwickelt werden kann.

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_{\vec{p}} \underbrace{A(\vec{p})}_{\text{Amplitude}} \overbrace{\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\underbrace{\vec{p}}_{\vec{p}=\hbar\vec{k}}\cdot\vec{r} - \underbrace{E(\vec{p})}_{E=\hbar\omega}t\right)\right]}^{\text{ebene Wellle}}$$

· Dispersionsrelation $E(p)$ für KGG : (Einsetzen)

$$-\frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{1}{c^2}\frac{E^2}{\hbar^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} = 0 \quad | \Leftrightarrow$$

$$E(p) = \pm c\sqrt{m_0^2c^2+p^2} =: \pm E(p)$$

- es gibt zu festem Impuls $\vec{p}$ immer 2 Lsg.:

$$\psi_\pm(p) = A_\pm\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_\pm(p)t)}$$

mit $E_\pm(p) = \pm E(p)$

- in Schröd.theorie war E die Energie. Gibt es <u>negative</u> Energien beim freien rel. Teilchen? <u>NEIN</u>!

- später: ψ_+ als auch ψ_- haben Energie $|E_\pm|$
  (erst bei Dirac gibt es neg. Energie)

- sind das vllt pos. und neg. geladene Teilchen? ja