

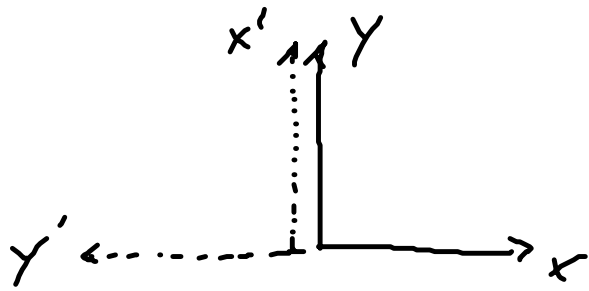
2. Die Dirac-Gleichung für freie Teilchen

- bisher: relativistische Formulierung über KGG und zweite Orts- u. Zeitableitungen
 - Nachteil: - kein Spin (Spin Null interpretiert)
- Ladungsdichteinterpretation für Mesonen
 - jetzt: Raum und Zeit können auch über erste Orts- und Zeitableitungen symmetrisch behandelt werden.
- Randbedingungen: - nicht-relativistische Grenzfall okay
- rel. Energie-Impuls Beziehung
- Ansatz: einfachste vorstellbare Wellengl. in ersten Ableitungen

$$\underbrace{i\hbar \partial_t \psi}_{\text{aus S. Gal \u00fcbernommen}} = \left[c \underbrace{\alpha^j \frac{\hbar}{i} \partial_j}_{\substack{\hat{=} p_j \\ j\text{-te Koord.}} + \underbrace{\beta m_0 c^2}_{\text{rettet sp\u00e4ter die rel. E-p-Beziehung}} \right] \psi$$

→ die Koeff. α^j und β sind zu bestimmen

- Problem: die α^j können keine Zahlen sein, da die DGL sonst unter Raumrotation nicht invariant ist.



$$x' = y \rightarrow \partial_y = \partial_{x'}$$

$$-y' = x \rightarrow \partial_x = -\partial_{y'}$$

2.1 Bestimmung der Diracoeffizienten

Dirac nimmt $N \times N$ hermitesche Matrizen für α^j und β an.

- Konsequenz: ψ ist N -komponentiger Vektor $\vec{\psi}$
sogen. N -dim Spinor

$$i \hbar \partial_t \vec{\psi} = [c \hat{\alpha}^j p_j + m_0 c^2 \hat{\beta}] \cdot \vec{\psi}$$

- Forderung: ebene Wellen sind Lsg.en die die rel. E-p-Beziehung erfüllen.

dazu Dirac-Gl zweimal anwenden:

$$- \hbar^2 \partial_t^2 \vec{\psi} = [c \hat{\alpha}^j \frac{\hbar}{i} \partial_j + m_0 c^2 \hat{\beta}] [c \hat{\alpha}^k \frac{\hbar}{i} \partial_k + m_0 c^2 \hat{\beta}] \vec{\psi}$$

- Achtung Matrizenmultiplikation: Matrizen müssen nicht vertauschen.

→ deshalb Produkt symmetrisieren: $\hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^k \rightarrow \frac{1}{2} (\hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^k + \hat{\alpha}^k \hat{\alpha}^j)$

$$\begin{aligned}
 -\partial_t^2 \vec{\psi} &= -\frac{c^2}{2} \underbrace{\left[\hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^k + \hat{\alpha}^k \hat{\alpha}^j \right]}_{[1]} \partial_j \partial_k \vec{\psi} \\
 &+ c \frac{u_0 c^2}{i \hbar} \underbrace{\left[\hat{\alpha}^j \partial_j \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^k \partial_k \right]}_{[2]} \vec{\psi} \\
 &+ \frac{u_0^2 c^4}{\hbar^2} \underbrace{\left[\hat{\beta}^2 \right]}_{[3]} \vec{\psi}
 \end{aligned}$$

$$[2]: \hat{\alpha}^k \partial_k \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^k \partial_k = (\hat{\alpha}^k \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^k) \partial_k$$

Um Forderung von oben zu erfüllen, wählen wir die Klammerausdrücke so, dass jeweils die K.G.G. erfüllt ist.

$$[1] \quad \hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^k + \hat{\alpha}^k \hat{\alpha}^j = 2 \delta_{kj} \mathbb{1}$$

$$[2] \quad \hat{\alpha}^k \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^k = 0 \quad (\Leftrightarrow \hat{\alpha}^k = -\hat{\beta} \hat{\alpha}^k \hat{\beta}^{-1})$$

$$[3] \quad \hat{\beta}^2 = \mathbb{1} \quad (\Leftrightarrow \hat{\beta} = \hat{\beta}^{-1})$$

Wenn [1-3] gilt, dann ist $-\partial_t^2 \vec{\psi} = -c^2 \partial_k \partial^k \vec{\psi} + \frac{u_0^2 c^4}{\hbar^2} \vec{\psi}$ ✓
 und somit die rel. E-p-Beziehung für die Komponenten von $\vec{\psi}$ erfüllt

• Dimension N und Matrizenwahl motivieren:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \underset{\uparrow}{\text{sp}}(\hat{\alpha}^k) &= -\underset{\uparrow}{\text{sp}}(\hat{\beta} \hat{\alpha}^k \hat{\beta}^{-1}) = -\underset{\uparrow}{\text{sp}}(\hat{\alpha}^k) \\
 &\quad [2] \qquad \qquad \qquad \text{zykl. tauschen} \\
 &\quad \qquad \qquad \qquad \qquad \beta \beta^{-1} = \mathbb{1}
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Summe der Eigenwerte von $\hat{\alpha}^k$ muß Null sein

(b) Da $(\hat{\alpha}^k)^2 = \mathbb{1}$ muß $\hat{\alpha}^k$ die Eigenwerte ± 1 besitzen
[1]

- Eigendarstellen $\hat{\alpha}^k$ -Matrix:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^k & 0 \\ 0 & \alpha_2^k \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (\alpha_1^k)^2 & 0 \\ 0 & (\alpha_2^k)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) aus (a+b) folgt

Dimension N muß gerade sein.

Die Summe der Diagonalelemente (± 1) muß sich in Spur zu 0 ergänzen.

$N=2$ geht nicht!

\rightarrow nicht genügend unabh. Matrizen um Forderung zu erfüllen

$N=4$ probieren. Mögliche Wahl ist

$$\hat{\alpha}^k = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{\sigma}^k \\ \hat{\sigma}^k & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

mit den Pauli-Spin-Matrizen

$$\hat{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

x-Komponente

y-Komp.

z-Komp.

des Matrixvektor $\vec{\hat{\alpha}} = (\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\alpha}^3)$

Damit ist die Dirac-Gl. konstruiert:

$$i\hbar \partial_t \vec{\psi} = \left(c \underbrace{\vec{\hat{\alpha}} \cdot \vec{p}}_{\hat{\alpha}^k p_k} + \hat{\beta} m_0 c^2 \right) \vec{\psi}$$

2.2 Die Dirac-Gl. in kovarianter Schreibweise

„kovariant“:

So heißen Gleichungen, die in allen Koord.systemen die durch Lorentztransfos verbunden sind, die selbe Struktur haben.

- Erinnerung: $\partial_t \rightarrow \partial_0$ und $x_0 = ct$
- Dirac-Gl. mit $\frac{1}{c} \hat{\beta}$ multiplizieren:

$$\left[-\frac{i}{\hbar} \left(\hat{\beta} \partial_0 + \hat{\beta}^k \hat{\alpha}^k \partial_k \right) + \frac{m_0 c}{\hbar} \mathbb{1} \right] \vec{\psi} = 0$$

- Einführen von $\hat{\gamma}^{\hat{\mu}}$: $\hat{\gamma}^{\hat{\mu}} = (\hat{\beta}, \hat{\beta}^k \hat{\alpha}^k, \hat{\beta}^k \hat{\alpha}^k, \hat{\beta}^k \hat{\alpha}^k)$

$$\left(-\frac{i}{\hbar} \underbrace{\hat{\gamma}^{\hat{\mu}}}_{\mu} \partial_{\hat{\mu}} + \frac{m_0 c}{\hbar} \mathbb{1} \right) \vec{\psi} = 0$$

$$\left(-i \not{\partial} + \frac{m_0 c}{\hbar} \underline{1} \right) \vec{\Psi} = 0$$

$\not{\partial}$ ist „kovariante Ableitung“ (von Feynman)

2.3 Kontinuitätsgl. und Wahr. interpretationen

• Analog zu Schröd. theorie:

$$\text{I} \quad i\hbar \partial_t \vec{\Psi} = (c \hat{\alpha}^k (p_k \vec{\Psi}) + \beta m_0 c^2 \vec{\Psi}) \quad | \vec{\Psi}^{\dagger}$$

$$\text{II} \quad -i\hbar \partial_t \vec{\Psi}^{\dagger} = (c (p_k \vec{\Psi})^{\dagger} \hat{\alpha}^{k\dagger} + \vec{\Psi}^{\dagger} \beta^{\dagger} m_0 c^2) \quad | \cdot \vec{\Psi}$$

$$\text{I} \quad i\hbar \vec{\Psi}^{\dagger} \partial_t \vec{\Psi} = c \vec{\Psi}^{\dagger} \hat{\alpha}^k (p_k \vec{\Psi}) + \vec{\Psi}^{\dagger} \beta m_0 c^2 \vec{\Psi}$$

$$\text{II} \quad -i\hbar \vec{\Psi} \partial_t \vec{\Psi}^{\dagger} = c (p_k \vec{\Psi})^{\dagger} \hat{\alpha}^{k\dagger} \vec{\Psi} + \vec{\Psi}^{\dagger} \beta^{\dagger} m_0 c^2 \vec{\Psi}$$

Wir wissen $\hat{\alpha}^{k\dagger} = \hat{\alpha}^k$ und $\beta^{\dagger} = \beta$

Differenz $\text{I} - \text{II}$ bilden

$$i\hbar \partial_t (\vec{\Psi}^{\dagger} \cdot \vec{\Psi}) = \frac{\hbar}{i} \partial_u (c \vec{\Psi}^{\dagger} \hat{\alpha}^k \vec{\Psi})$$

• Kontinuitätsgl.: $\partial_t (\vec{\Psi}^{\dagger} \cdot \vec{\Psi}) = -\partial_k j^k = -\nabla \cdot \vec{j}$

→ Wahr. dichte: $\rho = \vec{\Psi}^{\dagger} \cdot \vec{\Psi}$

W. Stromdichte: $j^k = c \vec{\Psi}^{\dagger} \hat{\alpha}^k \vec{\Psi}$

$$D_n \vec{\psi}^\dagger \cdot \vec{\psi} = \underbrace{|\psi_1|^2 + \dots + |\psi_4|^2}_{\text{positive}}$$

Damit erfüllt die Dirac-Gl. die Kontinuitätsgl. und ermöglicht eine Wahr. interpretation.