2. Die Dirac-Gleichung für freie Teilchen

- bisher: relativistische Formulierung über KGG und zweite Orts- u. Zeitableitungen

- Nachteil: – kein Spin (Spin Null interpretiert)
  – Ladungsdichteinterpretation für Mesonen

- jetzt: Raum und Zeit können auch über erste Orts- und Zeitableitungen symmetrisch behandelt werden.

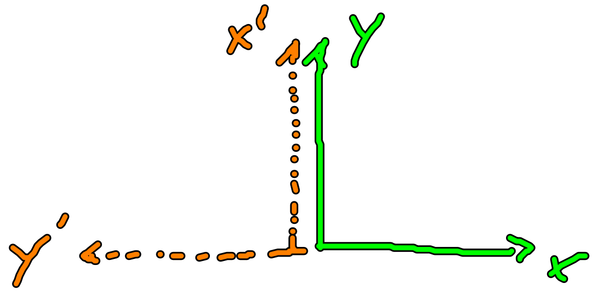
→ Randbedingungen: – nicht-relativistische Grenzfall ok
  – rel. Energie-Impuls Beziehung

- Ansatz: einfachste vorstellbare Wellengl. in ersten Ableitungen

$$\underbrace{i\hbar\,\partial_t \Psi}_{\text{aus S.Gl übernommen}} = \Big[\, c\,\alpha^j \underbrace{\frac{\hbar}{i}\partial_j}_{\hat{=}\, p_j \text{ j-te Koord.}} + \underbrace{\beta\; m_0 c^2}_{\text{rettet später die rel. E-p-Beziehung}} \Big]\Psi$$

→ die Koeff. α^j und β sind zu bestimmen

- Problem: die α^j können keine Zahlen sein, da die DGL sonst unter Raumdrehung nicht invariant ist.



$x' = y \;\rightarrow\; \partial_y = \partial_{x'}$

$-y' = x \;\rightarrow\; \partial_x = -\partial_{y'}$

2.1 Bestimmung der Dirackoeffizienten

Dirac nimmt $N \times N$ hermitesche Matrizen für α^j und β an.

- Konsequenz: ψ ist N-komponentiger Vektor $\vec{\psi}$

sogen. N-dim Spinor

$$i\hbar \partial_t \vec{\psi} = [c\,\hat{\alpha}^j p_j + m_0 c^2 \hat{\beta}] \cdot \vec{\psi}$$

- Forderung: ebene Wellen sind Lsg.en die die rel. E-p-Beziehung erfüllen.

dazu Dirac-Gl zweimal anwenden:

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \vec{\psi} = [c\,\hat{\alpha}^j \frac{\hbar}{i} \partial_j + m_0 c^2 \hat{\beta}][c\,\hat{\alpha}^k \frac{\hbar}{i} \partial_k + m_0 c^2 \hat{\beta}] \vec{\psi}$$

- Achtung Matrizenmultiplikation: Matrizen müssen nicht vertauschen.

$\rightarrow$ deshalb Produkt symmetrisieren: $\hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^k \rightarrow \frac{1}{2}(\hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^k + \hat{\alpha}^k \hat{\alpha}^j)$

$$-\partial_t^2 \vec{\Psi} = -\frac{c^2}{2}\underbrace{\left[\hat\alpha^j\hat\alpha^k + \hat\alpha^k\hat\alpha^j\right]}_{[1]}\partial_j\partial_k\vec{\Psi}$$

$$+\, c\,\frac{m_0 c^2}{i\hbar}\left[\underbrace{\hat\alpha^j\partial_j\hat\beta + \hat\beta\hat\alpha^k\partial_k}_{[2]}\right]\vec{\Psi}$$

$$+\,\frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}\underbrace{\left[\hat\beta^2\right]}_{[3]}\vec{\Psi}$$

$[2]$: $\hat\alpha^k\partial_k\hat\beta + \hat\beta\hat\alpha^k\partial_k = (\hat\alpha^k\hat\beta + \hat\beta\hat\alpha^k)\partial_k$

Um Forderung von oben zu erfüllen, wählen wir die Klammer-ausdrücke so, dass jeweils die KGG erfüllt ist.

$[1]$ $\quad \hat\alpha^j\hat\alpha^k + \hat\alpha^k\hat\alpha^j = 2\delta_{kj}\underline{\mathbb{1}}$

$[2]$ $\quad \hat\alpha^k\hat\beta + \hat\beta\hat\alpha^k = 0 \qquad (\Leftrightarrow \hat\alpha^k = -\hat\beta\hat\alpha^k\hat\beta^{-1})$

$[3]$ $\quad \hat\beta^2 = \underline{\mathbb{1}} \qquad (\Leftrightarrow \hat\beta = \hat\beta^{-1})$

Wenn $[1-3]$ gilt, dann ist $-\partial_t^2\vec{\Psi} = -c^2\partial_k\partial^k\vec{\Psi} + \frac{m_0^2c^4}{\hbar}\vec{\Psi}$ ✓
und somit die rel. E-p-Beziehung für die Komponenten von $\vec{\Psi}$ erfüllt

- Dimension N und Matrizenwahl motivieren:

(a) $\quad sp(\hat\alpha^k) \underset{[2]}{=} -sp(\hat\beta\hat\alpha^k\hat\beta^{-1}) \underset{\substack{\text{zykl. tauschen}\\ \beta\beta^{-1}=\underline{\mathbb{1}}}}{=} -sp(\hat\alpha^k)$

$\Rightarrow$ Summe der Eigenwerte von $\hat{\alpha}^k$ muß Null sein

(b) Da $(\hat{\alpha}^k)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ [1]}}{=} \mathbb{1}$ muß $\hat{\alpha}^k$ die Eigenwerte ± 1 besitzen

- Eigendarstellen $\hat{\alpha}^k$-Matrix:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^k & 0 \\ 0 & \alpha_2^k \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (\alpha_1^k)^2 & 0 \\ 0 & (\alpha_2^k)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) aus (a+b) folgt

Dimension N muß gerade sein.

Die Summe der Diagonalelemente (± 1) muß sich in Spur zu 0 ergänzen.

N = 2 geht nicht!

$\rightarrow$ nicht genügend unabh. Matrizen um Forderung zu erfüllen

N = 4 probieren. Mögliche Wahl ist

$$\hat{\alpha}^k = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{\sigma}^k \\ \hat{\sigma}^k & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

mit den Pauli-Spin-Matrizen

$$\hat{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

x-Komponente $\qquad$ Y-Komp. $\qquad$ z-Komp.

des Matrixvektor $\vec{\hat{\alpha}} = (\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\alpha}^3)$

Damit ist die Dirac-Gl. konstruiert:

$$\mathbb{1} i\hbar \partial_t \vec{\Psi} = (c \underbrace{\vec{\hat{\alpha}} \cdot \vec{p}}_{\hat{\alpha}^k p_k} + \hat{\beta} m_0 c^2) \vec{\Psi}$$

2.2 Die Dirac-Gl in kovarianter Schreibweise

„kovariant":

So heißen Gleichungen, die in allen Koord.systemen die durch Lorentztrafos verbunden sind, die selbe Struktur haben.

- Erinnerung: $\partial_t \to \partial_0$ und $x_0 = ct$
- Dirac-Gl. mit $\frac{1}{c}\hat{\beta}$ multiplizieren:

$$\left[-i\left(\hat{\beta}\partial_0 + \hat{\beta}\hat{\alpha}^i\partial_i\right) + \frac{m_0 c}{\hbar}\mathbb{1}\right]\vec{\Psi} = 0$$

- Einführen von $\vec{\hat{\gamma}}$: $\vec{\hat{\gamma}} = (\hat{\beta}, \hat{\beta}\hat{\alpha}^1, \hat{\beta}\hat{\alpha}^2, \hat{\beta}\hat{\alpha}^3)$

$$\left(-i \underbrace{\hat{\gamma}^\mu \partial_\mu} + \frac{m_0 c}{\hbar}\mathbb{1}\right)\vec{\Psi} = 0$$

$$\boxed{\left(-i\,\not{\partial} + \frac{m_0 c}{\hbar}\mathbb{1}\right)\vec{\psi} = 0}$$

$\not{\partial}$ ist „kovariante Ableitung" (von Feynman)

2.3 Kontinuitätsgl. und Wahr. interpretation

- Analog zu Schröd. theorie:

$$\text{I} \quad i\hbar\,\partial_t \vec{\psi} = \left(c\,\hat{\alpha}^k (p_k \vec{\psi}\right) + \beta m_0 c^2 \vec{\psi} \qquad | \vec{\psi}^{+} \cdot$$

$$\text{II} \quad -i\hbar\,\partial_t \vec{\psi}^{+} = \left(c\,(p_k \vec{\psi})^{+} \hat{\alpha}^{k+} + \vec{\psi}^{+} \hat{\beta}^{+} m_0 c^2\right) \qquad | \cdot \vec{\psi}$$

$$\text{I} \quad i\hbar\,\vec{\psi}^{+}\partial_t \vec{\psi} = c\,\vec{\psi}^{+}\hat{\alpha}^k (p_k \vec{\psi}) + \vec{\psi}^{+}\beta m_0 c^2 \vec{\psi}$$

$$\text{II} \quad -i\hbar\,\vec{\psi}\,\partial_t \vec{\psi}^{+} = c\,(p_k \vec{\psi})^{+}\hat{\alpha}^{k+}\vec{\psi} + \vec{\psi}^{+}\hat{\beta}^{+} m_0 c^2 \vec{\psi}$$

Wir wissen $\hat{\alpha}^{k+} = \hat{\alpha}^k$ und $\hat{\beta}^{+} = \hat{\beta}$

Differenz I − II bilden

$$i\hbar\,\partial_t(\vec{\psi}^{+}\cdot\vec{\psi}) = \frac{\hbar}{i}\,\partial_k\left(c\,\vec{\psi}^{+}\hat{\alpha}^k\vec{\psi}\right)$$

- Kontinuitätsgl.: $\partial_t(\vec{\psi}^{+}\cdot\vec{\psi}) = -\partial_k j^k = -\nabla\cdot\vec{j}$

→ Wahr. dichte: $\rho = \vec{\psi}^{+}\cdot\vec{\psi}$

W. stromdichte: $j^k = c\,\vec{\psi}^{+}\hat{\alpha}^k\vec{\psi}$

Da $\vec{\psi}^{\dagger} \cdot \vec{\psi} = \underbrace{|\psi_1|^2 + \ldots + |\psi_4|^2}_{\text{positive}}$

$$\boxed{\text{Damit erfüllt die Dirac-Gl. die Kontinuitätsgl. und ermöglicht eine Wahr. interpretation.}}$$