

2.4 Ebene Wellen als Lösungen der Dirac-Gl.

2.4.1 Konstruktion

- Schröd. Gl: $\psi = \psi^0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \sim e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{r}}$

Analoger Ansatz für Dirac-Gl.:

$$\vec{\psi}(\vec{r}, t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1^0 & \psi_2^0 & \psi_3^0 & \psi_4^0 \\ \vec{\varphi}_1^0 & \vec{\varphi}_2^0 \end{pmatrix}}_{\text{Fourieransatz}} e^{-i\frac{E}{\hbar}t + i\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{r}}$$

In Dirac-Gl. einsetzen:

$$\hat{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \\ -\hat{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(-i\hat{\gamma}^\mu \partial_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar} \mathbb{1} \right) \vec{\psi} = 0$$

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ -\vec{\varphi}_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{\sigma}^i \cdot \vec{p} \\ -\hat{\sigma}^i \cdot \vec{p} & \hat{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ \vec{\varphi}_2 \end{pmatrix} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ \vec{\varphi}_2 \end{pmatrix}$$

Matrixgl. ausschreiben:

$$\text{I} \quad E \vec{\varphi}_1 = c(\hat{\sigma}^i \cdot \vec{p}) \vec{\varphi}_2 + m_0 c^2 \vec{\varphi}_1$$

$$\text{II} \quad E \vec{\varphi}_2 = c(\hat{\sigma}^i \cdot \vec{p}) \vec{\varphi}_1 - m_0 c^2 \vec{\varphi}_2$$

lin. Gl. system
(Koeff. determinante
muss verschwinden)

Dazu benutzen: $(\sigma \cdot \vec{A})(\sigma \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \mathbb{1} + i\sigma \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

$$\Rightarrow E = E_\lambda(p) = \pm c (p^2 + m_0 c^2)^{1/2} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ mögl. Energiezweige} \\ \text{für } \lambda = \pm \end{array}$$

Über Euler-Lagrange-Gl kann man zeigen, dass beide Energiezweige sind ernstzunehmen!

- Beziehung zw. $\vec{\varphi}_1$ und $\vec{\varphi}_2$:
$$\vec{\varphi}_2 = \frac{c \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_\lambda + m_0 c^2} \vec{\varphi}_1$$

• Gesamtwellenfkt.:

$$\vec{\Psi}_{\vec{p}, \lambda}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ \frac{c \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_\lambda(p) + m_0 c^2} \vec{\varphi}_1 \end{pmatrix} e^{-i \left[\frac{E_\lambda(\vec{p})}{\hbar} t - \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar} \right]} \quad \begin{array}{l} \text{lin.} \\ \text{Fkt.} \\ \downarrow \\ \cdot \text{ Normierung} \end{array}$$

→ ebene Wellen Lsg, vektorwertig, $\vec{\varphi}_1$ (Zweiervektor) noch unbestimmt

• Forderungen:

(a) $\vec{\Psi}$ soll normiert sein (für Wahr. Interpretation)

(b) da $\vec{\varphi}_1$ Zweiervektor, können wir ihn bzgl. der Basis $\vec{\chi}_{m_s} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ darstellen

→ neben \vec{p} und λ tritt m_s als weitere QZ auf

• Lösung der Dirac-Gl.:

$$\vec{\Psi}_{\vec{p}, \lambda, u_s} = \left(\frac{u_0 c^2 + E_\lambda(p)}{2E_\lambda(p)} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \vec{\chi}_{u_s} \\ \frac{c \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_\lambda(p) + u_0 c^2} \vec{\chi}_{u_s} \end{pmatrix} e^{-i \left[\frac{E_\lambda(p)}{\hbar} t - \frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{r} \right]}$$

• Bemerkungen:

(a) Elementarlsg. der Dirac-Gl. sind ebene Wellen, die in 3 QZ veränderbar sind:

(1) Impuls \vec{p} (kontinuierlich)

(2) Energiezweig $\lambda = \pm$ (oberes/unteres E-Band)

(3) Spin QZ u_s (hat zwei Werte $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)

(b) können bel. Überlagerung haben:

$$\vec{\Psi} = \sum_{\vec{p}, \lambda, u_s} c_{\vec{p}, \lambda, u_s} \vec{\Psi}_{\vec{p}, \lambda, u_s}$$

(c) die $\vec{\Psi}_{\vec{p}, \lambda, u_s}$ sind Eigenfkt. zu

- (1) Hamiltonian \underline{H} (\vec{p} ist fest)
 Quantenzahl λ , Eigenwert $E_\lambda(\vec{p})$
- (2) Impulsoperator \underline{p}
 Quantenzahl \vec{p} , Eigenwert \vec{p}
- (3) ... operator $\underline{?}$
 Quantenzahl u_s , Eigenwert $?$
- } bilden gemeinsames
 Eigenfkt. system
 (ähnlich zum H-Atom)
 $L^2, L_z, H \rightarrow L, u_L, u_s$

(d) $\underline{?}$ ist der Helizitätsoperator $\underline{\Lambda}$

- Definition: $\underline{\Lambda} = \frac{\vec{\hat{S}} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$ mit $\hat{S}^i = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}$

Eigenwerte: $u_s \hbar = \pm \frac{1}{2} \hbar \Rightarrow u_s = \pm \frac{1}{2}$

$\underline{\Lambda}$ ist vierdimensionaler Spinvektoroperator, dessen Komponenten Matrizen sind.

2.4.2 Spinfreiheitsgrad und Energie

• Betrachte o. B. d. A.:

Ausbreitung von ebener Dirac-Wellen in z-Richtung.

$$\rightarrow \vec{p} = p_z \vec{e}_z = (0, 0, p_z)$$

• Helizität:

$$\underline{A} = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^z & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^z \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ -1 & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

• Nachweis, daß $\begin{pmatrix} \chi_{ms} \\ \chi_{ms} \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von \underline{A} sind:

$$\underline{A} \begin{pmatrix} \vec{\chi}_{1/2} \\ \vec{\chi}_{1/2} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

\uparrow
 $m_s = 1/2$

$$\underline{A} \begin{pmatrix} \vec{\chi}_{-1/2} \\ \vec{\chi}_{-1/2} \end{pmatrix} = \dots \dots \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$m_s = -1/2$

→ Die Viererspinor ebene Wellen sind Eigenzustände des Helizitätsoperators zu EW $\pm \frac{\hbar}{2}$. \underline{H} , \underline{P} , \underline{A} haben gemeinsamen Satz EF:

Es gibt zu jedem festen Impuls \vec{p} 4 mögl. Zustände:

$$\vec{\Psi}_{\vec{p}, \pm, \pm \frac{1}{2}}$$

$$\vec{\Psi}_{\vec{p}, +, +\frac{1}{2}} = N_+ \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{c p_z}{E_+ + m_0 c^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right) e^{-i \left(\frac{E_+(\vec{p})}{\hbar} t - \frac{p_z}{\hbar} z \right)}$$

$$= N_+ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ c p_z / [E_+(\vec{p}) + m_0 c^2] \\ 0 \end{array} \right) e^{-i(\dots)}$$

$$\vec{\Psi}_{\vec{p}, +, -\frac{1}{2}} = N_+ \cdot \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{c p_z}{E_+ + m_0 c^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right) e^{-i(\dots)}$$

$$= N_+ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -c p_z / [E_+ + m_0 c^2] \end{array} \right) e^{-i(\dots)}$$

$$\vec{\psi}_{p, -, +\frac{1}{2}} = N_+ \begin{pmatrix} -c p_z / [E_- + m_0 c^2] \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i \left(\frac{E_-(p)}{\hbar} t - \frac{p_z}{\hbar} z \right)}$$

$$\vec{\psi}_{p, -, -\frac{1}{2}} = N_+ \begin{pmatrix} 0 \\ c p_z / [E_- + m_0 c^2] \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(\dots)}$$

Im Gegensatz zur Schröd. gl. haben wir 4 unabh. Lsg. en zu einem festen Impuls \vec{p}

→ 2 neue Aspekte: - Spin (2 neue Lsg.)
- Energie (- u -)

(a) Eigenschaften des neuen Spin FG

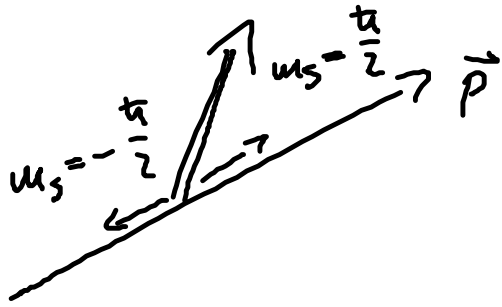
Zu jedem festen \vec{p} und zu jedem festen $\lambda = \pm$ gehören 2 EV die durch $m_s = \pm \frac{1}{2}$ bestimmt sind.

Die entsprechende Meßgröße zu m_s sind die EW von

$$\underline{\underline{\lambda}} = \frac{\lambda}{|\vec{p}|} \underbrace{\vec{S} \cdot \vec{p}} \rightarrow \text{neben Ort } \vec{r} \text{ gibt es weiteren FG } \vec{S} \text{ Spin als Observable zugeordnet}$$

Projektion von Spin in Ausbreitungsrichtung

„Spinvektor“



$$\|\vec{s}\| = \left\| \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\hbar}{2} \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|$$

- es sind prinzipiell zwei Einstellungen zur \vec{p} -Achse mögl.

- wegen $|s_z| = \frac{1}{2} \hbar$ spricht man von Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen

• Analogie zwischen Bahndrehimpuls und Spin:

Drehimpuls \vec{L}

Spin \vec{S}

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k \text{ (zykl.)}$$

$$[S_i, S_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_k$$

$$[L^2, \vec{L}] = 0$$

$$[S^2, \vec{S}] = 0$$

$$L^2 Y_{lm_l}(\vartheta, \varphi) = \hbar^2 L(L+1) Y_{lm_l}$$

$$S^2 \vec{\chi}_{m_s} = \hbar^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) \vec{\chi}_{m_s}$$

$$L_z Y_{lm_l}(\vartheta, \varphi) = \hbar m_l Y_{lm_l}$$

$$S_z \vec{\chi}_{m_s} = \hbar m_s \vec{\chi}_{m_s}$$

$$L = 0, 1, 2, \dots$$

$$S = \frac{1}{2}$$

$$m_l = -L, \dots, -1, 0, 1, \dots, L$$

$$m_s = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$$

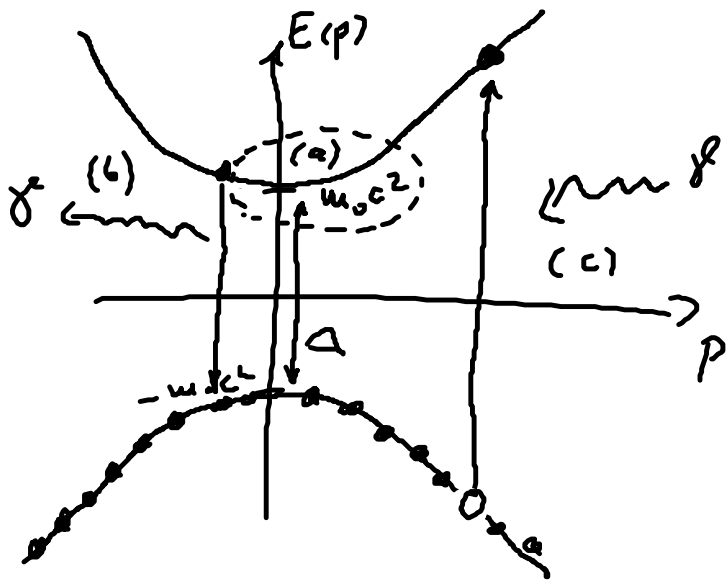
→ Interpretation des Spins als Eigendrehimpuls

(b) Energiespektrum der Dirac-Teilchen

Analoges Vorgehen zur KGB führt in der Lagrange-Feldtheorie der Dirac-Gl. zu positiven und negativen Energien.

→ müssen wir erstuchen

$$E_{\pm} = \pm c (p^2 + m_0^2 c^2)^{1/2}$$



$$\Delta = 2m_0 c^2 \stackrel{!}{=} 10^{10} \text{ K für Elektronenmasse}$$

(a) Schröd.gl. findet man bei $\lambda = \hbar$, $p \rightarrow 0$

$$E_{\pm} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} \xrightarrow[\text{für kleine } p]{\text{Taylor}} \underbrace{m_0 c^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{unbeobachtet}}} + \frac{p^2}{2m_0} \text{ de Broglie, bzw. Dispersion Schröd.gl.}$$

Jeder E-Zustand kann mit 2 Spinzuständen besetzt werden.

(b) Jedes \bar{e} im „+“ Zweig könnte durch Aussenden eines γ -Quanten zerfallen. Wird nicht beobachtet.

Um Zerfall zu verbieten, hat Dirac angenommen, dass alle E_- Zustände vollständig mit e^- besetzt sind (Pauli-Blockierung).

Problem: Es gibt einen "See" von gefüllten Zuständen. Damit hat Vakuum ∞ viele Teilchen und Energie.

Die Dirac-Gl. ist eigentl. eine Gl. für viele $e^- \rightarrow$ "Vielteilchentheorie". Auflösung der Probleme in QFT.

(c) Teilchen-Anti-Teilchen Paarerzeugung aus Vakuum:

Durch Absorption von γ -Quanten kann e^- aus E_- -See in E_+ gehoben werden. Es bleibt "pos" Loch im E_- -See zurück: Positron

wichtiges Ergebnis:

$$\begin{array}{rcl}
 h\nu & = & E_+ - E_- \\
 \uparrow & & \uparrow \quad \uparrow \\
 \text{Strahlung} & & e^- \text{-Energie} \quad p^+ \text{-Energie} \\
 \text{mind.} & & \\
 2 \times \text{Ruhenergie} & &
 \end{array}$$

Vakuum kann durch externe Felder modifiziert werden

Wird im Exp. beobachtet und gilt als Beweis für Vielteilcheninterpretation.

(d) In der ET-interpretation muß man sich auf oberen Zweig festlegen und den unteren vergessen. ET muß für hohe Energien fallengelassen werden.

(e) Positron ist Teilchen mit gleicher Ruhemasse wie e^- , aber entgegengesetzter Ladung im "Dirac-See";

Anti-Teilchen

(f) Viererkomponente von $\vec{\Psi}$ kann als

$$\begin{pmatrix} \text{Teilchen} \\ \text{Teilchen} \\ \text{Anti-T} \\ \text{Anti-T} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e^{-iE_+ t/\hbar} \\ e^{-iE_+ t/\hbar} \\ e^{-iE_- t/\hbar} \\ e^{-iE_- t/\hbar} \end{pmatrix}$$

interpretiert werden.

→ siehe nächste VL.