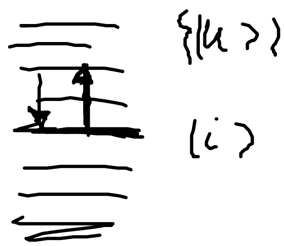
Mastergleichung (Diagonalelemente d. Dichtematrix)

$$\dot{\rho}_{ii}(t) = - \underbrace{\int_0^t ds}_{\substack{\text{Integration über} \\ \text{alle Zeiten seit} \\ \text{WW-Beginn} \\ \hat{=}\ \text{Gedächtniseffekt}}} \sum_{n \neq i} \underbrace{K_{iinn}(s)}_{\substack{\text{Wechselwirkungs-} \\ \text{feldrade}}} \underbrace{\Big(\underbrace{\rho_{nn}(t-s)}_{\substack{\text{Übergänge} \\ |n\rangle \to |i\rangle}} - \underbrace{\rho_{ii}(t-s)}_{\substack{\text{Übergänge} \\ |i\rangle \to |n\rangle}} \Big)}_{\text{sieht man später genauer}}$$

beschreibt die Umverteilung v. Wahrscheinlichkeit f. Besetzung durch Wechselwirkung K_{iinn}.



Wahrscheinlichkeitsfluß

$$K_{iinn}(s) = \Big(\underbrace{L_v}_{\text{WW}} \, \overbrace{e^{-iL_0 s}}^{\text{freie Bewegg.}} \, L_v \Big)_{\underline{ii}\,\underline{nn}}$$

<u>Produktsatz:</u>

$$= \underbrace{(L_v)_{\underline{\underline{ii}}ab}}_{①} \underbrace{\left(e^{-iL_0 s}\right)_{abcd}}_{②} \underbrace{(L_v)_{cd\underline{\underline{nn}}}}_{③}$$ bekannt

① $(L_v)_{iiab} = \frac{1}{\hbar}\left(V_{ia}\,\delta_{ib} - V_{bi}\,\delta_{ai}\right)$ lt. voriger VL

② $$\left(e^{iL_0 s}\right)_{abcd} = \underbrace{\left(e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}}\right)_{ac}}_{\langle a | e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} | c\rangle} \left(e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}}\right)_{bd} = e^{-it\omega_c}\,\delta_{ac}\, e^{it\omega_d}\,\delta_{bd}$$

$$H_0 |c\rangle = \varepsilon_c |c\rangle$$

$$\frac{\varepsilon_c}{\hbar} = \omega_c$$

③ $(L_v)_{cdnn} = \frac{1}{\hbar}\left(V_{cn}\,\delta_{dn} - V_{nd}\,\delta_{nc}\right)$

einsetzen und Kroneckersymbole ausführen (Summe $abcd$)

$$K_{iinn}(s) = -\frac{|V_{in}|^2}{\hbar^2}\, 2\cos\left((\omega_n - \omega_i)s\right)$$

Quanteninterferenz zwischen Zuständen

$$\dot{\rho}_{ii}(t) = 2\int_0^\infty ds \sum_{n\neq i} \frac{|V_{in}|^2}{\hbar^2} \cos\left((\omega_n-\omega_i)s\right)\left(\rho_{nn}(t-s) - \rho_{ii}(t-s)\right)$$

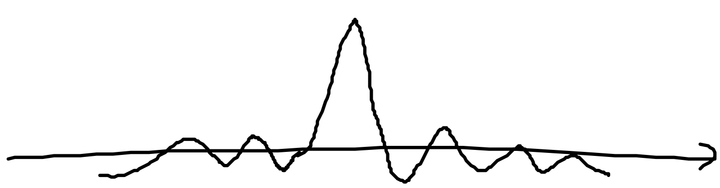
Gewinn v. Wahrscheinlichkeit — Verlust v. Wahrscheinlichkeit

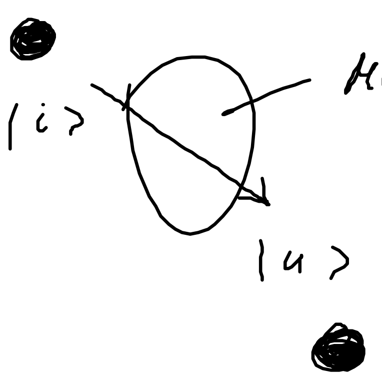
$$\rho_{ii}^{nn}(t-s) \overset{!}{=} \rho_{ii}^{nn}(t)$$

langsame Größe
im Vergleich mit der Kosinusoszillation

$$\int_0^t ds\, \cos(\omega_n-\omega_i)s = \underbrace{\frac{\sin(\omega_n-\omega_i)t}{(\omega_n-\omega_i)}} \xrightarrow{t\to\infty} \pi\,\delta(\omega_n-\omega_i)$$

$\hat{=}$ Energieerhaltg.





Moment d. Übergang
ist Energie unscharf d. h. $\delta(\omega_n-\omega_i)$

Verlust — Gewinn

$$\Rightarrow \dot{\rho}_{ii}(t) = -\sum_n W_{i\to n}\,\rho_{ii}(t) + \sum_n W_{n\to i}\,\rho_{nn}(t)$$

$$W_{\substack{i\to n\\ n\to i}} = \frac{2\pi}{\hbar^2} |V_{in}|^2 \, \delta(\omega_n - \omega_i)$$

" ---- " Fermis goldene Regel

abgeleitet durch: 1.) $\rho_{ij} = 0$ f. $i \neq j$

2) Markoff-Näherung $\rho_{nn}(t-s) \to \rho(t)$

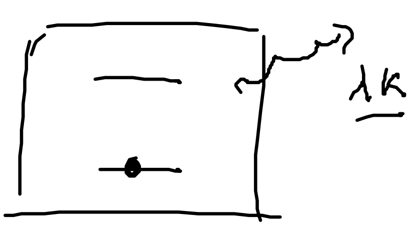
3) $t \to \infty$ → Energieerhaltung und Vernachlässigung v. Quanteninterferenzen

Δt = Beobachtungsskala

volle Dichtematrix — Kinetik (Fermis goldene Regel) — Hydrodynamik (klassische Wellen)

Beispiel f. Mastergleichung die mehr Info als Mittelwerte enthalten

Kopplung Strahlungsfeld – Zweiniveausystem



Sinn: welche Statistik hat Lichtfeld?

$T = $ fest $\qquad V_{ij} = \,?$ f. Mastergleichung.

kanonisch

$$V = -\sum_{\lambda q} \left(g_q \; a_1^{\dagger} a_2 \; c_{\lambda q}^{\dagger} + g_q^{*} \; a_2^{\dagger} a_1 \; c_{\lambda q} \right)$$

$$\dot{\rho}_{ii} = -\sum_j w_{i \to j} \, \rho_i + \sum_j w_{j \to i} \, \rho_j \qquad w = (V_{ij})$$

$$|i\rangle = |\alpha\rangle \, |\{n_{k_i}\}\rangle \quad , \quad |j\rangle = |\beta\rangle \, |\{n_{k_j}\}\rangle$$

↗ ungestört

Produktzustände v.
ZNS $|\alpha\rangle$ und
Feld $|\{n_{k_i}\}\rangle$

reell

$$V_{ij} \to V^{\alpha\beta}_{n_{k_i} n_{k_j}} = -\sum_q g_q \left(\langle\alpha| \langle n_{k_i}| \left(a_v^{\dagger} a_c \, c_q^{\dagger} + a_c^{\dagger} a_v \, c_q \right) |\beta\rangle |n_{k_j}\rangle \right)$$

$\langle\alpha| \, a_v^{\dagger} a_c \, |\beta\rangle$ als Bop

Zweiniveau.

$2 \mathrel{\hat{=}} c$ $\qquad |0\rangle \mathrel{\hat{=}} |v, c\rangle = |0,0\rangle$

$1 \mathrel{\hat{=}} v$

Vakuum

$|v\rangle = |1,0\rangle \qquad |c\rangle = |0,1\rangle$

↗ Besetzungszahl oben / unten
$\qquad c \qquad v$

$$\langle \alpha | a_v^\dagger \underbrace{a_c |\beta\rangle}_{\delta_{c\beta}} = \delta_{c\beta}\,\delta_{\alpha v}$$

$$\underbrace{\langle \alpha \quad | v \rangle}_{\delta_{\alpha v}}$$

weiterhin $\quad \langle n_{k_i} | c_q^\dagger | n_{k_j} \rangle = \sqrt{m_q+1}\, \langle n_{k_i} | m_q+1 \rangle$

nur f. $k_j = q$ sind diese auszurechnen, ansonst orthogonal

$$= \sqrt{m_q+1}\; \delta_{m_q+1,\, n_{k_i}} \qquad i \neq j$$

alle Term berechnen, einsetzen in $|V_{in}|^2$

es entsteht so was wie (m_q+1)

Kronecker symbole einsetzen und auswerten

$\downarrow$

$\rho_i \rightarrow \rho^{\alpha}_{n_k}$ Wahrscheinlichkeit Elektron in α (also v oder c) und n_k Photon in Zustand k zu finden

$\Updownarrow$

$\alpha, k_i = k$

interessiere uns nur f. Licht: was ist die Wahrscheinlichkeit n_k Photon zu haben, ohne Rücksicht auf ZNS macht Sinn wenn man sich nur f. Photon interessiert

O – Operator der nur Photonoperator enthält

$\rightsquigarrow \quad c^+c \;,\; c \;,\; c^+c^+cc$

weil $|\alpha\rangle$ ZNS Zustand

$$\langle O\rangle = sp(\rho(t)\, O) = \sum_{n,\alpha} \langle n|\langle\alpha|\, \rho(t)\, O\, |\alpha\rangle|n\rangle$$

$$= \sum_n \langle n|\sum_\alpha \rho^{\alpha\alpha}(t)\, O\,|n\rangle$$

$$= \sum_n \langle n|\, O \sum_\alpha \rho^{\alpha\alpha}(t)\, |n\rangle$$

$$= \sum_n \langle n|O|n\rangle \underbrace{\sum_\alpha \rho_n^{\alpha\alpha}(t)}$$

$$\boxed{\langle O\rangle = \sum_n O_{nn}\, \rho_n(t)}$$

$$\rho_n = \sum_\alpha \rho_n^{\alpha\alpha}(t)$$ abgespurte Dichtematrix (Info ist verloren)

Mastergl. $\quad \rho_i \rightarrow \rho_{nn}^{\alpha\alpha} = \rho_n^\alpha$

$$\dot{\rho}_n = \Gamma \left(\underline{\underline{n \rho^c_{n-1}}} - \underline{\underline{n \rho^v_n}} - \underline{(n+1)\rho^c_n} + \underline{\underline{(n+1)\rho^v_{n+1}}} \right)$$

radiative Rate an VC über Photonratengl.

$$\rho_n = \rho_n^v + \rho_n^c$$

koppelt immer noch an ρ_n^c, ρ_n^v

$$\rho_n^c \cong \rho_n \sigma_c$$

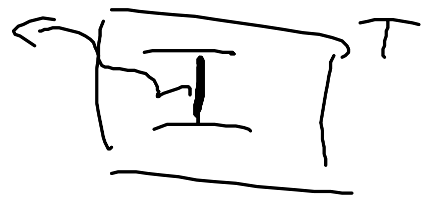
Näherung v. unabhängigen Wahrscheinlichkeiten

ρ_n : n-Photon zu finden

σ_c : ZNS in „c" zu finden

σ_v : " in „v" zu finden

<u>Photonenratengleichung</u>



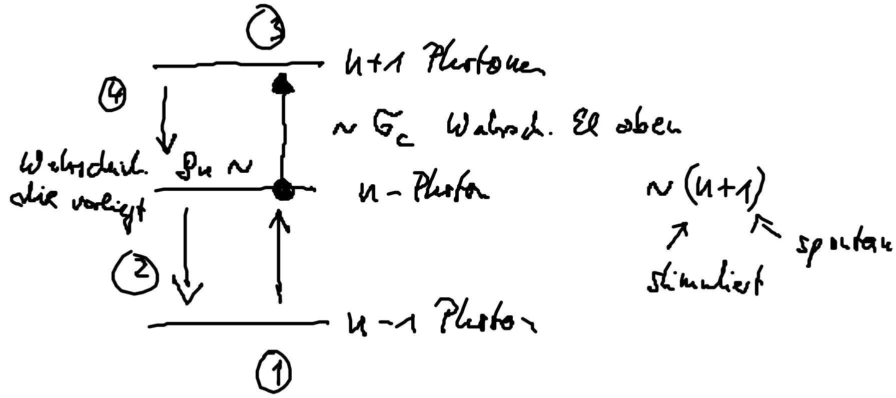
Verluste

$$\underbrace{\dot{\rho}_n}_{} = \underbrace{\Gamma}_{} \Big(\underbrace{\overset{①}{\sigma_c n \rho_{n-1}} - \overset{②}{\sigma_v n \rho_n} - \overset{③}{\sigma_c (n+1)\rho_n} + \overset{④}{\sigma_v (n+1)\rho_{n+1}}}_{} \Big)$$

Wahrscheinlichkeit n Photon bei WW und ZNS des Energieabstand $\omega_c - \omega_v$ zu finden wenn $\omega_c - \omega_v \approx$ Photonenergie des Mode mit n Photon

radiative Rate (GA)

Verlust und Gewinnterm f. ρ_n (A)



vorher: Photon rate gleichg. als Gl. f. Mittelwert

$$\langle \dot{n} \rangle = \Gamma \sigma_c - \Gamma (\sigma_v - \sigma_c) \langle n \rangle$$

$$\langle O \rangle = \sum_n O_{nn} \rho_n =$$

$$O = c^\dagger c$$

$$\langle n \rangle = \langle c^\dagger c \rangle = \sum_n n \rho_n$$

ρ_n bestimmt Mittelwert

$$g_2 = \frac{\langle n(n-1) \rangle}{\langle n \rangle^2} \quad \text{analog}$$

Lösg:

$$\dot{\rho}_0 = \Gamma(-\sigma_c \rho_0 + \sigma_v \rho_1)$$

$$\dot{\rho}_1 =$$

$$\vdots$$

Anwendg. stationär Lsg.

$$\sigma_c, \sigma_v = \text{konstant}$$

Zeitableitg $= 0$ setzen

$$\Rightarrow \quad \sigma_c \rho_0 = \sigma_v \rho_1 \quad \to \quad \rho_1 = \frac{\sigma_c}{\sigma_v} \rho_0$$

iterative lösen, wenn ρ_0 bekannt

$$\to \quad \rho_n = \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_v} \right)^n \rho_0$$

$$\rho_0 \overset{?}{=} \quad \text{aus} \quad \sum_n \rho_n = 1$$

f. $\sigma_c < \sigma_v$

$$\rho_n = \left(1-\frac{\sigma_c}{\sigma_v}\right)\left(\frac{\sigma_c}{\sigma_v}\right)^n \qquad *$$

$$\boxed{\text{thermisches Licht} \quad \rho_n = \frac{\langle n\rangle^n}{(1+\langle n\rangle)^{n+1}}} \qquad **$$

ρ_n kann in dieser Form gebraucht werden f.

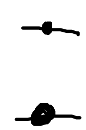
$$\langle n\rangle = \frac{\sigma_c}{\sigma_v-\sigma_c}$$ aus Rateg. oben

f. dies $\langle n\rangle$ ist tatsächlich * und ** identisch

$$\left.\langle n\rangle = \frac{1}{\frac{\sigma_v}{\sigma_c}-1} = \frac{1}{e^{(\varepsilon_c-\varepsilon_v)\beta}-1}\right\} \text{ Planck-Verteilg.}$$

$$\sigma_v = e^{-\varepsilon_v\beta}N, \quad \sigma_c = e^{-\varepsilon_c\beta}N$$

Damit ergibt sich f. stationäres Licht

mit $\sigma_c < \sigma_v$  die Planckverteilg.